Sujet de thèse CIFRE

Réduction de modèle physique pour la variabilité géométrique non paramétrique de problèmes non linéaires de grande taille

English: Physical Model Order Reduction for nonparametrized geometrical variability of large scale nonlinear problems.

Entreprise :

Safran, contacts fabien.casenave@safrangroup.com, felipe.bordeu@safrangroup.com

Laboratoire :

CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech, contact virginie.ehrlacher@enpc.fr

Date : la thèse pourra commencer à partir d'Avril 2022

Il y a possibilité de précéder le travail de thèse par un stage

1. DESCRIPTION DU CONTEXTE

Comme dans de très nombreux domaines industriels, la simulation numérique est un outil incontournable, utilisé dans toutes les étapes des activités de Safran. Elle met en œuvre des codes de calculs complexes, dont la durée de résolution par simulation peut atteindre plusieurs heures, voire plusieurs jours. En général, nous sommes dans un contexte de problèmes paramétrés pour lesquels une résolution ne suffit pas : les études d'optimisation ou de propagation d'incertitudes nécessitent des résolutions pour un nombre important de valeurs paramétriques : dans ce cas, il devient prohibitif d'utiliser des modèles trop coûteux.

Plusieurs méthodes sont disponibles pour accélérer la simulation numérique d'une série de problèmes physiques. Dans un contexte paramétrique, certaines méthodes statistiques proposent de faire une régression non-linéaire de solutions du modèle coûteux calculé à certaines valeurs de paramètres – on parle souvent de méta-modèles. Une autre famille de méthodes, que nous appellerons réduction de modèle physique, cherche à résoudre une approximation des équations de la physique. La réduction de modèle physique comprend, en général, deux phases : (i) une première phase d'apprentissage, où le problème est résolu avec un solveur de référence à certaines valeurs paramétriques, (ii) une phase d'exploitation, où le problème est construit et résolu de façon efficace (c'est-à-dire plus rapidement que le solveur de référence) à d'autres valeurs paramétriques. La mise en œuvre diffère des méta-modèles statistiques principalement par le fait que, dans la phase d'exploitation, ce sont les équations de la physique qui sont résolues.

Au cours des 5 dernières années, des bibliothèques de réduction de modèle non-linéaires ont été développées à SafranTech pour des problèmes nonlinéaires en mécanique des structures, thermique et mécanique des fluides. Des preuves de concept ont été apportées sur des mises en œuvre industrielles, pour lesquelles les dépendances paramétriques n'étaient pas la géométrie de la pièce. La prochaine étape pour l'essor de ces technologies au service des besoins du groupe consiste à développer une méthodologie robuste et générique (c'est-à-dire applicable à toutes les physiques considérées) pour prendre en compte une paramétrisation de la géométrie complète de la pièce étudiée. Ce besoin se retrouve dans la majorité des études de conception de pièce mécanique à Safran. Même si les variabilités géométriques sont souvent paramétrées dans la formulation des problèmes de conception, l'approximation réduite doit pouvoir être appelée pour n'importe quelle nouvelle forme (sous risques d'erreurs importantes si la forme n'est plus compatible), d'où le contexte de méthodes compatibles avec des variabilités géométriques non-paramétrées.

Une base de données de simulations en mécanique des structures avec variabilités géométriques sera construite et utilisée pour comparer les méthodes développées pendant la thèse. D'autres bases de données en thermique pourront être construites.

2. OBJECTIFS ET VERROUS SCIENTIFIQUES

Nous définissons un maillage compatible avec un calcul éléments finis comme un maillage possédant des caractéristiques (longueur moyenne des arêtes, régularité de la densité des sommets et de la forme des éléments) garantissant une précision donnée à l'approximation de la solution calculée par la méthode des éléments finis. Dans certaines études en variabilité géométrique, les géométries diffèrent seulement par une opération de *morphing* à partir d'un maillage de référence, et tous les maillages morphés sont compatibles avec le calcul élément finis du problème correspondant. D'autres situations plus complexes existent, quand la variabilité géométrique contient des paramètres catégoriels ('famille de formes 1', 'famille de formes 2', etc…), quand des variations géométriques importantes distordent les éléments du maillage au point d'en nécessiter la régénération, ou lorsque la topologie n'est pas conservée (apparition ou disparition de trous par exemple).

Les méthodes classiques en réduction de modèle ont besoin de calculer les corrélations entre solutions correspondant à différentes valeurs paramétriques. Lorsque le support des fonctions solutions change (cas d'une variabilité géométrique), le calcul des corrélations devient mal défini : quel est le support d'intégration ? Par ailleurs, si une configuration *online* fait apparaître une zone inexistante dans les solutions précalculées, comment calculer la solution réduite dans cette zone ? Enfin, notons que la solution originale exprimée sur le domaine morphé n'est pas, dans le cas général, la solution du problème posé sur le domaine morphé. Ces éléments donnent un statut particulier aux paramètres géométriques dans les mises en œuvre des méthodes de réduction de modèle.

Dans la famille des méthodes de réduction de modèle physique, la méthode des bases réduites construit une base à partir de solutions du problème calculées à des valeurs paramétriques sélectionnées par un algorithme glouton et un estimateur d'erreur efficace [1-3]. La Proper Orthogonal Decomposition (POD) [4-5] propose de construire une nouvelle base de fonctions où la solution sera cherchée. Cette base d'ordre réduit contient beaucoup moins de vecteurs que la taille du modèle considéré : le problème réduit est donc beaucoup plus rapide à résoudre. Cependant, il faut projeter les équations du modèle considéré sur cette base pour pouvoir construire le problème réduit. Les conséquences importantes sont une forte intrusivité au code et, dans le cas général, une perte d'efficacité algorithmique : l'étape de projection devient aussi lourde que la résolution du modèle considéré et aucun gain de performance n'est obtenu. Pour corriger ce problème, une nouvelle étape de compression appelée hyperréduction est alors nécessaire, pour laquelle plusieurs méthodes ont été proposées, dont l'Empirical Interpolation Method (EIM) [6-7], la Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) [8], l'Energy-Conserving Sampling and Weighting (ECSW) [9-10], l'Empirical Cubature Method (ECM) [11] et l'« hyperreduction » [12] (qui a donné son nom à cette classe de méthodes). Une autre méthode, la Proper Generalized Decomposition (PGD) [13], consiste à réécrire un nouveau solveur où l'approximation paramétrique sous forme de variables séparées sera construite, en même temps que le problème haute-fidélité sera résolu : aucun calcul de solution préalable n'est nécessaire. Dans un contexte non-linéaire et industriel, le succès d'une méthode est difficile à anticiper. Les travaux récents à Safran confirment des performances intéressantes de la POD couplée à l'ECM pour la réduction de problèmes nonlinéaires en variabilités non-géométriques. L'état de l'art actuel en réduction de modèle pour variation géométriques contient les références suivantes.

- [14] ROM non-linéaire avec hyperréduction (GNAT, DEIM) pour variation paramétrique de simulations RANS.
- [15] Optimisation sous contrainte en utilisant des modèles hyperréduits non-linéaires, application à l'optimisation de forme. La function objectif et les contraintes sont evalués en utilisant un meta-model à base de radial basis function.
- [16] Réduction d'un problème avec des interfaces mobiles : la compression des *snapshots* est formulée comme une approximation de rang faible pondérée par une matrice binaire, représentant le support d'une des deux zones.
- [17] Interpolation entre bases POD pour la construction d'un modèle réduit pour la rotation forcée d'un solide dans un fluide.
- [18] Volumes finis en CFD : deux méthodes de *mesh motion* pour les transformations de maillage sont testées (*laplacian smoothing* et *Radial Basis Function*). L'efficacité *online* est assurée par l'utilisation de la DEIM au niveau discret sur les matrices et les vecteurs.
- [19] *Steady incompressible* Navier-Stokes, réduction de la *Shifted Boundary Method*. Les variations géométriques sont paramétrées en utilisant une fonction de niveau, le *background* étant un maillage cartésien fixe. Nous n'avons besoin ni de formulation sur un domaine de référence, ni de remaillage.
- [20] Paramétrisation du domaine par points de controle (*free-form* deformations), EIM sur les paramètres géométriques correspondant et base réduite : appliqué sur la déformation de profils NACA en CFD.
- [21] *Free-form deformations* et méta-modèle à base de POD et *Gaussian process regressor* sur les coefficients de la POD.
- [22] *Geometry-independent reduced basis method* (pas de remaillage ni de transformation vers une géométrie de référence), *background* mesh fixé et fonction de niveau. Extension des travaux précédents de Rozza aux discrétisation CutFEM non-linéaires. Application en CFD.
- [23] Génération de maillage à partir de tomographies, paramétrisation des formes, ROM POD-Galerkin avec EIM pour retrouver une dépendance affine en fonction des paramètres.
- [24.1, 24.2] MDEIM et géométrie variable : un problème de déformation élastique pour générer les maillages et une MDEIM pour réduire le problème, en prenant les paramètres géométriques dans la décomposition EIM, avec base réduite.
- [25] *Naval ship hull geometric variations*: un modèle paramétrique pour les variations globales et locales de forme est créé. *Free-form deformation* et POD sont utilisées pour réduire le problème de CFD.
- [26] Nouvelle méthode POD pour la modélisation d'écoulements compressibles par déformation de maillage : *dynamic average and dynamic basis functions to model compressible flow using a deforming mesh*
- [27] Calcul de modes POD et de leur sensibilité à des paramètres de forme (*Sensitivity Analysis*)
- [28] *Mapping* à partir d'un domaine de reference ave application en CFD (Stokes)

- [29] Problème dominés par un phénomène de transport : nouvelle decomposition de la solution en une function qui traque la discontinuité et une partie résiduelle dédiée aux chocs.
- [30, 41] *Transfinite mapping* non affine pour la paramétrisation de forme et transformation continue vers un domaine de référence.
- [43] ROM pour un problème de frontière libre. L'approche est basée sur une description ALE (*Arbitrary-Lagrangian-Eulerian)* du modèle, qui est décomposé par un schema élément fini conservant la masse. La méthode de bases réduites et EIM sont utilisées, avec une garantie de la conservation de la masse par le ROM.
- [31] « *New Gappy* », pas d'hyperréduction (nonlinéarités quadratiques), calcul haute fidélité local à effectuer, application en Navier-Stokes incompressible
- [32] CNN pour erreur de projection entre une simulation fine et grossière, puis ajout des modes erreurs de projection aux solutions grossières pour avoir une base enrichie. *Offline* à refaire à chaque nouvelle géométrie *online*.
- Réduction de modèle en optimisation topologique
    - [33.1], [33.2] Résolution inexacte par ROMs, sous-espace de Krylov avec recyclage de l'information par ROM
    - [34] reduction du problème adjoint pour l'optimisation topologique

Autres éléments bibliographiques :

- Couplage *high-fidelity* / *ROM-based low fidelity* (*domain decomposition* / *partitioning*)
    - [35] *discontinuous Galerkin domain decomposition* : POD dans une zone à faible fidélité et resolution des lois de conservation dans les zones à haute fidélité, appliqué à Euler compressible en présence de chocs
- Technologies récentes d'*autoencoder*s pour représentation réduite + résolutions des équations physiques dans l'espace latent à des variation géométriques
    - [36] Premier article, *reacting flow*, pas d'hyperréduction
    - [37] Réseau peu profond + hyperréduction par Gappy-POD, appliqué à Burgers 2D

Quelques outils numériques et algorithmes utilisés en réduction de modèle pour variations géométriques :

- [38] La Gappy POD utilisée pour la première fois pour la reconnaissance de visages.
- [39,40] Gappy POD pour du design inverse. La forme optimale d'une aile d'avion est déterminée par une interpolation appropriée de forms connues. Pas de résolution d'équation *online*, seulement de la reconstruction de données.

Une revue bibliographique récente sur la réduction de modèle pour les problèmes de grande taille [42].

3. DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ADOPTÉE ET CONTRIBUTION AU PROGRÈS DES CONNAISSANCES

L'objectif de la thèse est de contribuer directement au développement des technologies de réduction de modèle physique de Safran Tech.

1. Objectif technique : mettre à disposition un code capable de simuler rapidement les équations de la physique pour la mécanique des structures non-linéaire sous variabilité géométrique.
2. Objectif scientifique : Développer une méthodologie robuste, générique et efficace pour la réduction de modèle physique sous variabilité géométrique.

Caractéristiques :

- Les variabilités géométriques sont paramétrées pour construire la base de données, mais l'approximation réduite doit pouvoir être appelée pour n'importe quelle nouvelle forme (sous risque d'erreurs importantes si la forme n'est plus compatible). Ceci permettrait de changer de paramétrisation de la géométrie en phase d'exploitation sans avoir à recalculer tout l'apprentissage.
- La forme de toute la structure doit pouvoir changer (les méthodes avec zoom structural ou décomposition de domaine ne sont pas applicables). Certains designs de pièce mécanique nécessitent des modifications globales de la forme.
- L'approche doit être générique (ne doit pas être dédiée à une physique particulière) et robuste (exclut a priori toutes les méthodes « *assemble then approximate* » comme (D)EIM).
- L'approche doit être extensible (complexité algorithmique maîtrisée, extension prévue pour le parallèle en mémoire distribuée).

4. DESCRIPTION DETAILLÉE DES TRAVAUX ENVISAGÉS PAR ANNÉE

Actions prévues pour la première année :

Le doctorant commencera par réaliser une étude bibliographique sur les méthodes de réduction de modèle en variabilité géométrique, en commençant par les références données dans la section 2. Les avantages et inconvénients propres à chaque méthode seront détaillés, pour identifier des pistes pouvant traiter les caractéristiques du problème considéré : variabilité de la géométrie de la structure complète, généricité multiphysique et extensibilité algorithmique. Une piste originale consisterait à construire une extension de [36,37] à des variabilités géométriques.

Ensuite, le doctorant commencera à s'approprier les outils i) de simulation numérique utilisés à Safran pour la réduction de modèle et ii) de génération des bases de données de solution du problème considéré. A la fin de la première année, le cas-test industriel sera choisi et une première proposition de méthodologie sera formulée.

Actions prévues pour la deuxième année :

Au cours de la deuxième année, le doctorant proposera une méthodologie originale pour traiter le cas-test industriel identifié.
L'étudiant gardera à l'esprit l'opportunité d'adapter l'approche retenue aux caractéristiques du cas considéré : peut-on optimiser une étape en la rendant « *goal-oriented* », c'est-à-dire adaptée à la prédiction d'une quantité d'intérêt ?

Les questions théoriques suivantes pourront également être adressées :

- Est-ce que le modèle réduit construit est inconditionnellement stable ?
- Peut-on construire un estimateur d'erreur certifiant l'erreur faite par le modèle réduit, par rapport à la solution du modèle haute fidélité ?

- Il y a une infinité de *morphings* possibles, peut-on définir une notion de *morphing* optimal pour la réduction de modèle (qui minimise l'épaisseur de Kolmogorov) ? Une première définition de *morphing* entre deux géométries naturelle pour ce problème de réduction de modèle serait de considérer celui qui minimise en moyenne la norme euclidienne du déplacement des points du domaine d'une géométrie à une autre. Ce *morphing* peut être calculé en résolvant une équation particulière et connue, appelée équation de Monge-Ampère. Trouver une manière efficace, robuste et rapide de résoudre cette équation pour identifier le *morphing* associé fera partie des questions sur lesquelles le doctorant devra se pencher.
- Le problème de recherche de *morphing* optimal peut être posé sur un support géométrique fixe (cas d'onde solitaire en 1D). Il y a 2 composantes au *morphing* : *morphing* de la surface pour prendre en compte les variations géométriques et *morphing* des points intérieurs pour minimiser l'épaisseur de Kolmogorov : peut-on construire un cadre formel ?
- Après avoir étudié les variations géométriques sous forme de morphing de maillage, il peut-être envisagé de réfléchir à une extension pour des variations générique nécessitant un remaillage, comme les variations de grande amplitude ou une modification de la topologie.

Un deuxième cas-test industriel, sur une autre physique, pourra-être construit pendant cette année. La complexité technique et scientifique pourra être augmentée en ajoutant des contraintes de contact ou de remaillage de la géométrique d'un calcul à l'autre dans la phase d'exploitation, ou même d'un pas de temps à l'autre au sein du même calcul.

Actions prévues pour la troisième année :

Le doctorant mettra en œuvre la méthodologie développée dans un cas d'usage d'optimisation ou de quantification d'incertitudes à construire. Par exemple, il pourrait s'agit d'optimiser la forme d'une aube pour maximiser sa résistance ou quantifier l'incertitude sur une quantité d'intérêt générée par la méconnaissance des tolérances de fabrication d'une pièce.

Le deuxième semestre sera consacré à la rédaction du manuscrit de thèse.

5. REFERENCES :

[1] C Prud'homme, D Rovas, K Veroy, Y Maday, AT Patera, and G Turinici. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: reduced basis output bound methods. Journal of Fluids Engineering, 124(1):70–80, 2002.

[2] F. Casenave, A. Ern et T. Lelièvre, Accurate and online-efficient evaluation of the a posteriori error bound in the reduced basis method. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 48 (1), 207–229, 2014.

[3] F. Casenave, A. Ern et T. Lelièvre, A nonintrusive reduced basis method applied to aeroacoustic simulations. Advances in Computational Mathematics 41 (5), 961-986, 2015.

[4] P. Holmes. Low dimensional modeling of turbulence using the POD: A tutorial. Springer , 2005.

[5] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I—III. Quart. Appl. Math., 45(3):561–590, 1987.

[6] M. Barrault, Y. Maday, N.C. Nguyen, et A.T. Patera. An 'Empirical Interpolation' Method: Application to Efficient Reduced-Basis Discretization of Partial Differential Equations. C.R. Acad. Sci. Paris Series I, 339:667–672, 2004.

[7] F. Casenave, A. Ern et T. Lelièvre, Variants of the Empirical Interpolation Method: Symmetric formulation, choice of norms and rectangular extension. Applied Mathematics Letters 56, 23-28, 2016.

[8] S. Chaturantabut, et D.C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation method. SIAM Journal on Scientific Computing, 32(5):2737–2764, 2010.

[9] C. Farhat, P. Avery, T. Chapman, et J. Cortial. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 98(9):625–662, 2014.

[10] C. Farhat, T. Chapman, et P. Avery. Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 102(5): 1077–1110, 2015.

[11] J.A. Hernández, M.A. Caicedo, A. Ferrer, Dimensional hyper-reduction of nonlinear finite element models via empirical cubature, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 313: 687-722, 2017.

[12] D. Ryckelynck, A priori hypereduction method : an adaptive approach, Journal of Computational Physics, 202 (N1): 346 - 366, 2005.

[13] F. Chinesta, P. Ladeveze, et E. Cueto, A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. Archives of Computational Methods in Engineering, 18 :395–404, 2011.

[14] K. M. Washabaugh, M. J. Zahr and C. Farhat. On the Use of Discrete Nonlinear Reduced-Order Models for the Prediction of Steady-State Flows Past Parametrically Deformed Complex Geometries, AIAA 2016-1814. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. January 2016.

[15] D. Amsallem, M. Zahr, Y. Choi and C. Farhat. Design optimization using hyper-reduced-order models. Struct Multidisc Optim 51, 919–940 (2015)

[16] M. Balajewicz, C. Farhat, Reduction of nonlinear embedded boundary models for problems with evolving interfaces, Journal of Computational Physics 274, 489-504 (2014)

[17] A. Falaize, E. Liberge, A. Hamdouni, POD-based reduced order model for flows induced by rigid bodies in forced rotation, Journal of Fluids and Structures 91 (2019)

[18] G. Stabile, M. Zancanaro, G. Rozza. Efficient geometrical parametrization for finite-volume-based reduced order methods. Int J Numer Methods Eng. 121: 2655– 2682 (2020)

[19] E. N. Karatzas, G. Stabile, L. Nouveau, G. Scovazzi, G. Rozza, A reduced-order shifted boundary method for parametrized incompressible Navier–Stokes equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 370: 113273, (2020)

[20] T. Lassila, G. Rozza, Parametric free-form shape design with PDE models and reduced basis method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (23–24): 1583-1592 (2010)

[21] N. Demo, G. Ortali, G. Gustin, G. Rozza, G. Lavini. An efficient computational framework for naval shape design and optimization problems by means of data-driven reduced order modeling techniques. Boll Unione Mat Ital 14, 211–230 (2021).

[22] E. N. Karatzas, M. Nonino, F. Ballarin, G. Rozza. A reduced order cut finite element method for geometrically parameterized steady and unsteady Navier–Stokes problems, submitted

[23] F. Ballarin, E. Faggiano, S. Ippolito, A. Manzoni, A. Quarteroni, G. Rozza, R. Scrofani. Fast simulations of patient-specific haemodynamics of coronary artery bypass grafts based on a POD–Galerkin method and a vascular shape parametrization, Journal of Computational Physics 315: 609-628 (2016)

[24.1] Reduced Basis Methods for parametrized PDEs (talk), A. Manzoni

[24.2] A. Manzoni and F. Negri, Efficient Reduction of PDEs Defined on Domains with Variable Shape. In: Benner P., Ohlberger M., Patera A., Rozza G., Urban K. (eds) Model Reduction of Parametrized Systems. MS&A (Modeling, Simulation and Applications), vol 17. Springer (2017)

[25] D. Villa, S. Gaggero, A. Coppede, G. Vernengo, Parametric hull shape variations by Reduced Order Model based geometric transformation, Ocean Engineering 216: 107826 (2020)

[26] B.A. Freno, P.G.A. Cizmas, A proper orthogonal decomposition method for nonlinear flows with deforming meshes, International Journal of Heat and Fluid Flow 50: 145-159 (2014)

[27] A. Hay, I. Akhtar and J. Borggaard. On the Sensitivity Analysis of Angle-of-Attack in a Model Reduction Setting. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition 1473 (2010)

[28] A.E. Løvgren, Y. Maday and E.M. Rønquist, A reduced basis element method for the steady Stokes problem : Application to hierarchical flow systems, Modeling Identification and Control 27:79-94 (2006)

[29] H. Bansal, S. Rave, L. Iapichino, W.H. Schilders and N. van de Wouw, Model Order Reduction Framework for Problems with Moving Discontinuities, In ENUMATH 83-91 (2019)

[30] C. Jäggli, L. Iapichino, G. Rozza, An improvement on geometrical parameterizations by transfinite maps, Comptes Rendus Mathematique 352(3): 263-268 (2014)

[31] N. Akkari, F. Casenave, D. Ryckelynck, An Updated Gappy-POD to capture non-parameterized geometrical variation in uid dynamics problems, submitted

[32] F. Casenave, N. Akkari, D. Ryckelynck, Reduced Order Modeling Assisted By Convolutional Neural Network For Thermal Problems With Nonparametrized Geometrical, In: Arai K., Kapoor S., Bhatia R. (eds) Intelligent Computing. SAI 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1229. Springer (2020)

[33.1, 33.2] Y. Choi, G. Oxberry, D. White and T. Kirchdoerfer, Accelerating design optimization using reduced order models, submitted

[34] W. Yao, S. Marques, T.T. Robinson and L. Sun, A Reduced-order Model for Aerodynamic Shape Optimization, AIAA 2019-0975. AIAA Scitech 2019 Forum. (2019)

[35] S. Riffaud, M. Bergmann, C. Farhat, S. Grimberg, A. Iollo, The DGDD Method for Reduced-Order Modeling of Conservation Laws, Journal of Computational Physics, 437:110336 (2021)

[36] K. Lee and K.T. Carlberg, Model reduction of dynamical systems on nonlinear manifolds using deep convolutional autoencoders, Journal of Computational Physics, 404: 108973 (2020)

[37] Y. Kim, Y. Choi, D. Widemann, T. Zohdi, A fast and accurate physics-informed neural network reduced order model with shallow masked autoencoder, submitted

[38] R. Everson and L. Sirovich, Karhunen–Loève procedure for gappy data, Journal of the Optical Society of America A 12(8) (1995)

[39] T. Bui-Thanh, M. Damodaran and K. Willcox, AIAA Journal, 42(8): 1505-1516 (2004), Aerodynamic Data Reconstruction and Inverse Design Using Proper Orthogonal Decomposition

[40] K. Willcox, Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition, Computers & Fluids, 35(2): 208-226 (2006)

[41] L. Iapichino, A. Quarteroni and G. Rozza, A reduced basis hybrid method for the coupling of parametrized domains represented by fluidic networks, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 221:63-82 (2012)

[42] K. Lu, K. Zhang, H. Zhang, X. Gu, Y. Jin, S. Zhao, C. Fu, Y. Yang, A Review of Model Order Reduction Methods for Large-Scale Structure Systems, Shock and Vibration, 2021:6631180 (2021)

[43] C. Lehrenfeld, S. Rave. Mass conservative reduced order modeling of a free boundary osmotic cell swelling problem. Advances in Computational Mathematics, 2019, vol. 45, no 5, p. 2215-2239.

[44] E. Cances, V. Ehrlacher, T. Lelievre. Convergence of a greedy algorithm for high-dimensional convex nonlinear problems. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 21 (12), 2433-2467

[45] E. Cancès, V. Ehrlacher, T. Lelièvre. Greedy algorithms for high-dimensional eigenvalue problems, Constructive Approximation 40 (3), 387-423

[46] E. Cances, V. Ehrlacher, T. Lelièvre. Greedy algorithms for high-dimensional non-symmetric linear problems, ESAIM: Proceedings 41, 95-131

[47] V. Ehrlacher, D. Lombardi, O. Mula, F.-X. Vialard. Nonlinear model reduction on metric spaces. Application to one-dimensional conservative PDEs in Wasserstein spaces, arXiv preprint arXiv:1909.06626

[48] A. Benaceur, V. Ehrlacher, A. Ern, S. Meunier. A progressive reduced basis/empirical interpolation method for nonlinear parabolic problems, SIAM Journal on Scientific Computing 40 (5), A2930-A2955