



# Comportement des grands ouvrages de Génie Civil

## Modélisation par éléments poutres multifibres

Sophie Capdevielle

Workshop CSMA Juniors, Giens, 14 mai 2017

# Modélisation de grands ouvrages de Génie Civil



## Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
  - ▶ Prise en compte du comportement local du matériau
- Deux échelles contradictoires à concilier

## Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
- ▶ Prise en compte du comportement local du matériau
- Deux échelles contradictoires à concilier
- ▶ De nombreuses incertitudes
  - Aléa
  - Matériau
  - Liaisons entre éléments

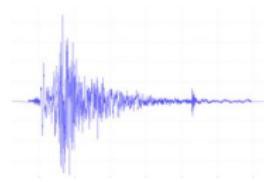
## Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
- ▶ Prise en compte du comportement local du matériau
- Deux échelles contradictoires à concilier
- ▶ De nombreuses incertitudes
  - Aléa
  - Matériau
  - Liaisons entre éléments
- ▶ Objectif : diagnostic, aide à la décision

# Exemple

## Caractérisation de la vulnérabilité sismique des structures existantes

- Réponse numérique de la structure à un signal sismique



### Méthode de calcul avancée

- Calcul temporel dynamique
- A l'échelle de la structure
- Comportement non linéaire

- Incertitudes sur :
    - la connaissance de la structure
    - le signal sismique
  - → Nombreux calculs à réaliser, en vue d'une étude probabiliste
- Méthode numérique efficace requise

## 1 Contexte : stratégies de modélisation

- Définition du besoin
- Développement d'approches simplifiées
- Eléments finis multifibres

## 2 Éléments finis multifibres

- Principe
- Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
- Modèles de comportement matériau
- Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres

## 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

# Différentes possibilités de modélisation structurelle



Éléments poutres



Développement d'approches simplifiées

# Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



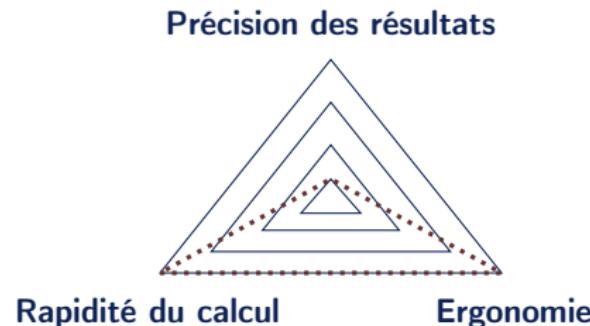
Rapidité du calcul

Ergonomie

Éléments poutres



# Différentes possibilités de modélisation structurelle



.... Éléments poutres



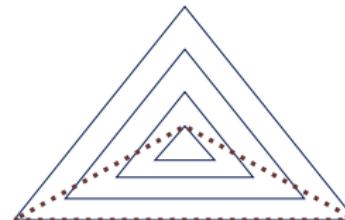
Poutre en flexion 4 points  
non linéaire  
**Modèle Poutre**

- ▶ Temps de calcul : quelques secondes

# Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



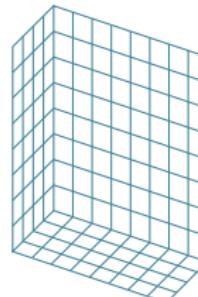
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres



- - Éléments finis volumiques



Poutre en flexion 4 points non linéaire

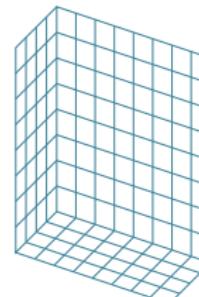
# Différentes possibilités de modélisation structurelle



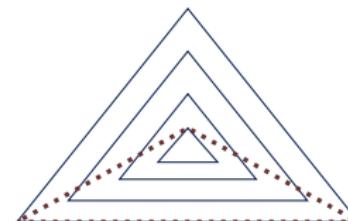
.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques



Précision des résultats



Rapidité du calcul

Ergonomie

Poutre en flexion 4 points non linéaire

Modèle 3D [Guenet, 2016]

- ▶ Difficultés de convergence
- ▶ Temps de calcul : quelques heures

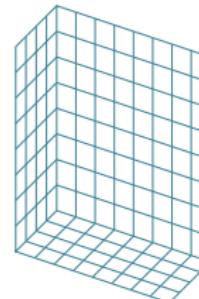
# Différentes possibilités de modélisation structurelle



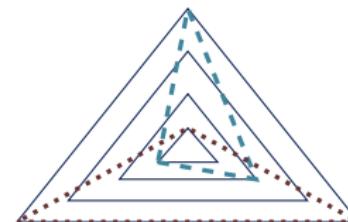
.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques



Précision des résultats



Rapidité du calcul

Ergonomie

Poutre en flexion 4 points non linéaire

Modèle 3D [Guenet, 2016]

- ▶ Difficultés de convergence
- ▶ Temps de calcul : quelques heures

# Approches simplifiées

- Basées sur une représentation multi-échelle de la structure.
- Concentration des efforts de calcul dans les points de développement des non-linéarités.

## Stratégies de modélisation simplifiée

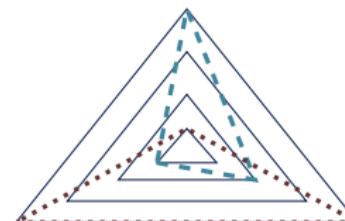
- Macro-élément [Grange, 2008, Nguyen, 2012].
- Modèle de béton armé équivalent (ERC) [Kotronis et Mazars, 2005].
- Méthodes hiérarchiques FEM×DEM ou FEM<sup>2</sup> [Desrues, 2015].
- Éléments poutres multifibres [Spacone et El-Tawil, 2004].

[Kotronis et Grange, 2016]

# Éléments finis multifibres



Précision des résultats

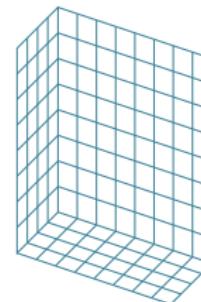


Rapidité du calcul

Ergonomie

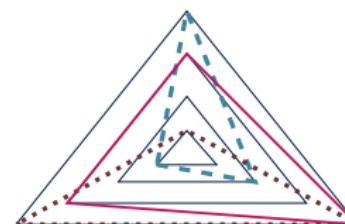
.... Éléments poutres

-- Éléments finis volumiques



# Éléments finis multifibres

Précision des résultats



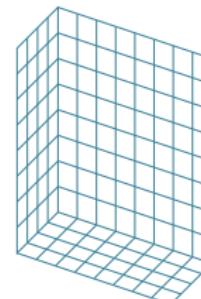
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques



— Éléments multifibres



## 1 Contexte : stratégies de modélisation

- Définition du besoin
- Développement d'approches simplifiées
- Eléments finis multifibres

## 2 Éléments finis multifibres

- Principe
- Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
- Modèles de comportement matériau
- Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres

## 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

# Éléments finis multifibres

Échelle de la poutre

- Éléments poutre

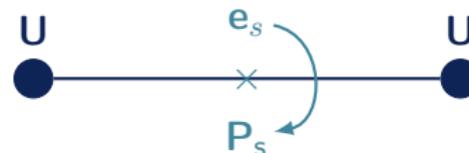


$e_s$  Déformations généralisées

# Éléments finis multifibres

## Échelle de la poutre

- Éléments poutre  
sans postulat de la loi de comportement généralisée

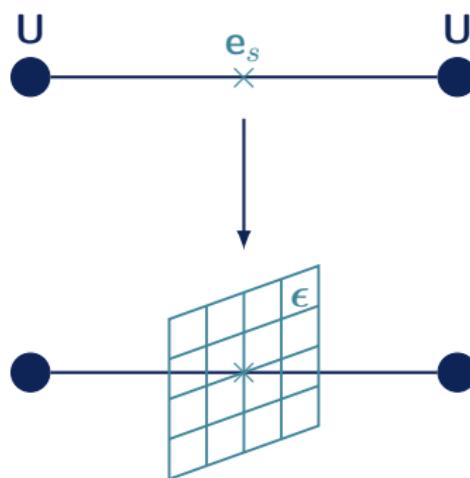


$e_s$  Déformations généralisées  
 $P_s$  Efforts généralisés

# Éléments finis multifibres

## Échelle de la poutre

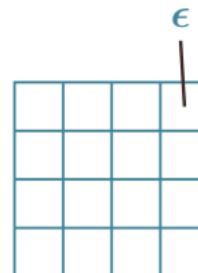
- Éléments poutre + section au point de Gauss de l'élément



$e_s$  Déformations généralisées  
 $\epsilon$  Déformations

# Éléments finis multifibres

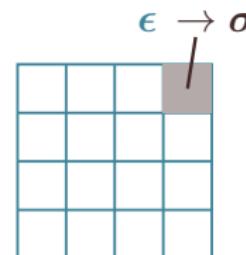
Passage à l'échelle de la section



- Calcul des déformations  $\epsilon$ 
  - dans chaque "fibre" (= point d'intégration) de la section,
  - à partir d'une hypothèse cinématique (ex : Timoshenko).

# Éléments finis multifibres

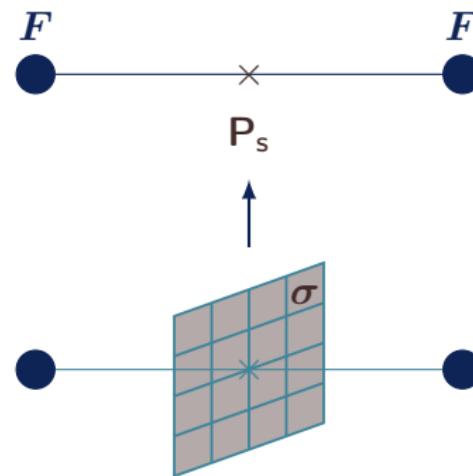
Passage à l'échelle de la section



- Calcul des déformations  $\epsilon$ 
  - dans chaque "fibre" (= point d'intégration) de la section,
  - à partir d'une hypothèse cinématique (ex : Timoshenko).
- Calcul des contraintes  $\sigma$ 
  - à partir des déformations dans chaque fibre,
  - grâce à la loi de comportement choisie.

# Éléments finis multifibres

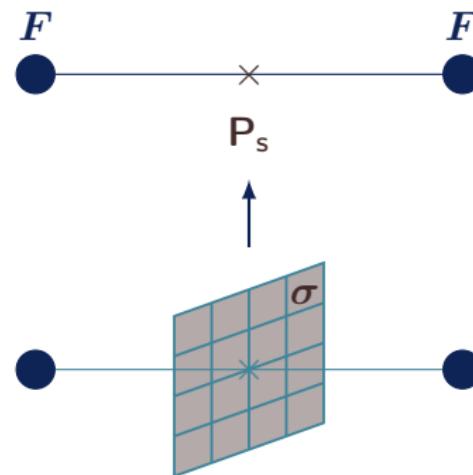
Retour à l'échelle de la poutre



- Efforts généralisés calculés par intégration des contraintes sur la section

# Éléments finis multifibres

Retour à l'échelle de la poutre



- Efforts généralisés calculés par intégration des contraintes sur la section
- Puis interpolés aux noeuds de l'élément poutre

## 1 Contexte : stratégies de modélisation

- Définition du besoin
- Développement d'approches simplifiées
- Eléments finis multifibres

## 2 Éléments finis multifibres

- Principe
- Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
- Modèles de comportement matériau
- Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres

## 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

# Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds :  $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$

# Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds :  $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$
- Déplacements dans la poutre
  - Hypothèse de Timoshenko : sections restent planes
  - D'où le champ de déplacement :

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u - y\theta_z + z\theta_y \\ v - z\theta_x \\ w + y\theta_x \end{bmatrix}$$

# Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds :  $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$
- Déplacements dans la poutre
  - Hypothèse de Timoshenko : sections restent planes
  - D'où le champ de déplacement :

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u - y\theta_z + z\theta_y \\ v - z\theta_x \\ w + y\theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \mathbf{a}_s(y,z) \mathbf{U}(x)$$

## Déformations

Tenseur des déformations calculé sous l'hypothèse de petites déformations par  $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}(\mathbf{u})^T)$ .

Déformations dans la poutre :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} \\ -z \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{dv}{dx} - \theta_z \\ y \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{dw}{dx} + \theta_y \end{bmatrix}$$

# Application du principe des travaux virtuels

$\forall \boldsymbol{u}^*$  cinématiquement admissible à 0,

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\epsilon_{xx}^* \sigma_{xx} + 2\epsilon_{xy}^* \sigma_{xy} + 2\epsilon_{xz}^* \sigma_{xz}) d\Omega}_{W_i^*} = \int_{S_{x,\text{ext}}} \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{F}_{\text{ext}} dS - \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{f} d\Omega$$

# Travail virtuel des efforts internes

$$W_i^* = \int_{\Omega} (\epsilon_{xx}^* \sigma_{xx} + 2\epsilon_{xy}^* \sigma_{xy} + 2\epsilon_{xz}^* \sigma_{xz}) d\Omega$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} W_i^* = & \int_{\Omega} \left[ \frac{du^*}{dx} - y \frac{d\theta_z^*}{dx} + z \frac{d\theta_y^*}{dx} \right] \sigma_{xx} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ -z \frac{d\theta_x^*}{dx} + \frac{dv^*}{dx} - \theta_z^* \right] \sigma_{xy} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ y \frac{d\theta_x^*}{dx} + \frac{dw^*}{dx} + \theta_y^* \right] \sigma_{xz} d\Omega \end{aligned}$$

# Travail virtuel des efforts internes

Discrétisation adaptée aux éléments poutres

$$\begin{aligned} W_i^* = & \int_L \frac{du^*}{dx} \left[ \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx \\ & + \int_L \left( \frac{dv^*}{dx} - \theta_z^* \right) \left[ \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xy} d\mathcal{S} \right] dx \\ & + \int_L \left( \frac{dw^*}{dx} + \theta_y^* \right) \left[ \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xz} d\mathcal{S} \right] dx \\ & + \int_L \frac{d\theta_x^*}{dx} \left[ \int_{\mathcal{S}} y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy} d\mathcal{S} \right] dx \\ & + \int_L \frac{d\theta_y^*}{dx} \left[ \int_{\mathcal{S}} z \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx \\ & + \int_L \frac{d\theta_z^*}{dx} \left[ \int_{\mathcal{S}} -y \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx \end{aligned}$$

# Définition des déformations et efforts généralisés conjugués

$$\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw}{dx} + \theta_y \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ \alpha \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} \int_S \sigma_{xx} dS \\ \int_S \sigma_{xy} dS \\ \int_S \sigma_{xz} dS \\ \int_S y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy} dS \\ \int_S z\sigma_{xx} dS \\ \int_S -y\sigma_{xx} dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$W_i^* = \int_L \mathbf{e}_s^{*T} \mathbf{P}_s dx = \int_L \mathbf{e}_s^{*T} \left[ \int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS \right] dx$$

# Discrétisation en éléments poutres

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{B}_p \mathbf{U}_{el}^p$$

$$W_i^* = \mathcal{U}^{*T} \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[ \int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS \right] dx}_{\mathbf{P}_{el}}$$

$$\mathbf{P}_{el} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{P}_s dx$$

$$\mathbf{P}_s = \int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS$$

# Définition des matrices de raideur élémentaire et de section

Linéarisation de la loi de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}_{\text{mat}} \epsilon$$

Effort résistant élémentaire linéarisé :

$$\mathbf{P}_{\text{el,lin}} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[ \int_{\mathcal{S}} \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \epsilon \, d\mathcal{S} \right] dx = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[ \int_{\mathcal{S}} \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \mathbf{a}_s \, d\mathcal{S} \right] \mathbf{B}_p \, dx \, \mathbf{U}_{\text{el}}^p$$

D'où la définition des matrices de raideur :

$$\mathbf{K}_{\text{el}} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{K}_{\text{s}} \mathbf{B}_p \, dx$$

$$\mathbf{K}_{\text{s}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \mathbf{a}_s \, d\mathcal{S}$$

## 1 Contexte : stratégies de modélisation

- Définition du besoin
- Développement d'approches simplifiées
- Eléments finis multifibres

## 2 Éléments finis multifibres

- Principe
- Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
- **Modèles de comportement matériau**
- Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres

## 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

# Caractéristiques des modèles de comportement

Complexité du modèle fonction des besoins de modélisation

- Modèle 1D  $\epsilon_{xx} \rightarrow \sigma_{xx}$  très efficace pour applications :
  - Éléments de structures élancés (Modélisation Bernoulli)
  - Contraintes normales prédominantes
- Modèles "1,5D"  $[\epsilon_{xx} \quad 2\epsilon_{xy} \quad 2\epsilon_{xz}] \rightarrow [\sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz}]$
- Modèles 3D condensés pour obtenir un tenseur des contraintes antiplan

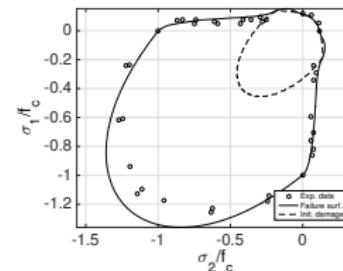
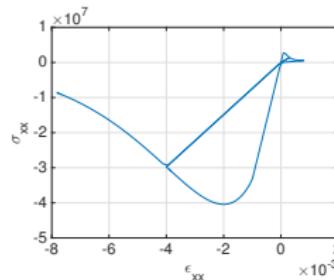
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

+ Prise en compte ou non des non-linéarités

# Exemple de modèle matériau béton

Mu modèle [Mazars et al., 2014]

- Modèle d'endommagement unilatéral



- Paramètres à définir :
  - Module d'Young  $E$
  - Coefficient de Poisson  $\nu$  (choisi = 0,2)
  - Seuils d'endommagement  $y_{c0}, y_t0$
  - Paramètres  $A_c, B_c, A_t, B_t$  gouvernant la forme du comportement après endommagement

# Atouts des éléments finis multifibres

## Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

# Atouts des éléments finis multifibres

## Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

## Validité de la méthode : contraintes normales prédominantes

- Poutres élancées, sollicitées en traction-compression ou flexion
- Démontrée sur des benchmarks [Grange et al., 2008], [Kotronis, 2008]

# Atouts des éléments finis multifibres

## Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

## Validité de la méthode : contraintes normales prédominantes

- Poutres élancées, sollicitées en traction-compression ou flexion
- Démontrée sur des benchmarks [Grange et al., 2008], [Kotronis, 2008]



Développement des éléments finis multifibres  
Volet 3 projet ANR Sinaps@

# Limites des éléments finis multifibres

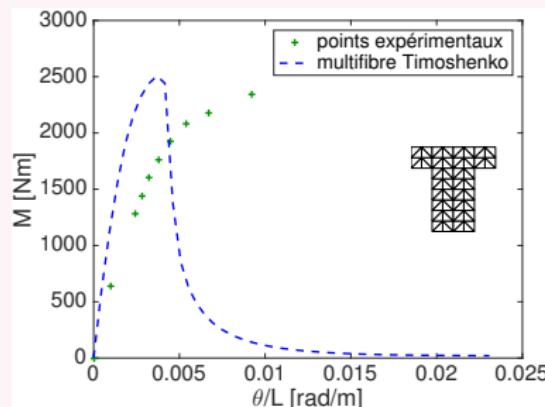
## Limites : cisaillement important

- Effort tranchant [Mazars et al., 2002]
- Torsion [Casaux, 2003]

# Limites des éléments finis multifibres

## Limites : cisaillement important

- Effort tranchant [Mazars et al., 2002]
- Torsion [Casaux, 2003]



# Enrichissement des éléments finis multifibres

## Travaux récents de recherche

- Enrichissement de la cinématique pour améliorer le comportement en
  - Torsion [Casaux, 2003], [Capdevielle, 2015]
  - Cisaillement [LeCorvec, 2012], [Capdevielle, 2016]
- Prise en compte de la fissuration [Bitar, 2017]
- Prise en compte de l'effet de confinement lié aux armatures transversales
- Comportement de l'interface acier-béton

## Enjeux

- Conserver un temps de calcul compétitif
- Conserver l'ergonomie