



Comportement des grands ouvrages de Génie Civil

Modélisation par éléments poutres multifibres

Sophie Capdevielle

Workshop CSMA Juniors, Giens, 14 mai 2017

Modélisation de grands ouvrages de Génie Civil



Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
 - ▶ Prise en compte du comportement local du matériau
- ➔ Deux échelles contradictoires à concilier

Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
- ▶ Prise en compte du comportement local du matériau



Deux échelles contradictoires à concilier

- ▶ De nombreuses incertitudes
 - Aléa
 - Matériau
 - Liaisons entre éléments

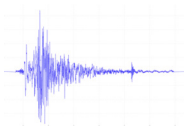
Un défi à relever

- ▶ Calculs à l'échelle de la structure
- ▶ Prise en compte du comportement local du matériau
- ➔ Deux échelles contradictoires à concilier
- ▶ De nombreuses incertitudes
 - Aléa
 - Matériau
 - Liaisons entre éléments
- ▶ Objectif : diagnostic, aide à la décision

Exemple

Caractérisation de la vulnérabilité sismique des structures existantes

- Réponse numérique de la structure à un signal sismique



Méthode de calcul avancée

- Calcul temporel dynamique
 - A l'échelle de la structure
 - Comportement non linéaire
- Incertitudes sur :
 - la connaissance de la structure
 - le signal sismique
 - → Nombreux calculs à réaliser, en vue d'une étude probabiliste



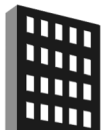
Méthode numérique efficace requise

- 1 **Contexte : stratégies de modélisation**
 - Définition du besoin
 - Développement d'approches simplifiées
 - Éléments finis multifibres

- 2 **Éléments finis multifibres**
 - Principe
 - Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
 - Modèles de comportement matériau
 - Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres

- 3 **Vers un enrichissement des approches simplifiées**

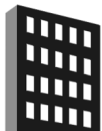
Différentes possibilités de modélisation structurelle



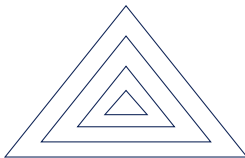
Éléments poutres



Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



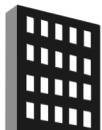
Rapidité du calcul

Ergonomie

Éléments poutres



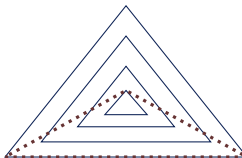
Différentes possibilités de modélisation structurelle



.... Éléments poutres



Précision des résultats



Rapidité du calcul

Ergonomie

Poutre en flexion 4 points
non linéaire

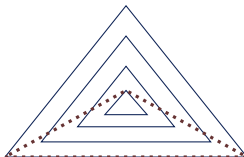
Modèle Poutre

- Temps de calcul :
quelques secondes

Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



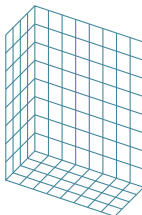
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques

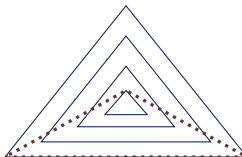


Poutre en flexion 4 points
non linéaire

Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



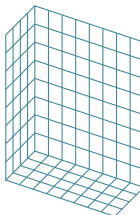
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques



Poutre en flexion 4 points
non linéaire

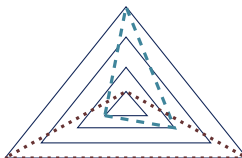
Modèle 3D [Guenet, 2016]

- Difficultés de convergence
- Temps de calcul : quelques heures

Différentes possibilités de modélisation structurelle



Précision des résultats



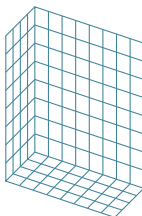
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres



-- Éléments finis volumiques



Poutre en flexion 4 points
non linéaire

Modèle 3D [Guenet, 2016]

- Difficultés de convergence
- Temps de calcul : quelques heures

Approches simplifiées

- Basées sur une représentation multi-échelle de la structure.
- Concentration des efforts de calcul dans les points de développement des non-linéarités.

Stratégies de modélisation simplifiée

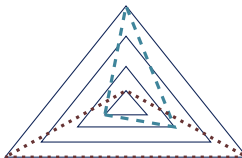
- Macro-élément [Grange, 2008, Nguyen, 2012].
- Modèle de béton armé équivalent (ERC) [Kotronis et Mazars, 2005].
- Méthodes hiérarchiques $FEM \times DEM$ ou FEM^2 [Desrues, 2015].
- Éléments poutres multifibres [Spacone et El-Tawil, 2004].

[Kotronis et Grange, 2016]

Éléments finis multifibres



Précision des résultats



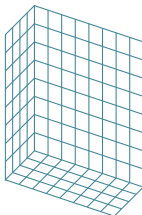
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres

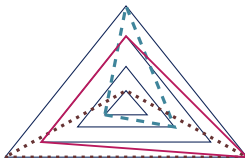
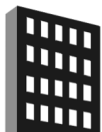


- - Éléments finis volumiques



Éléments finis multifibres

Précision des résultats



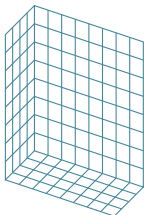
Rapidité du calcul

Ergonomie

.... Éléments poutres

- - Éléments finis volumiques

— Éléments multifibres

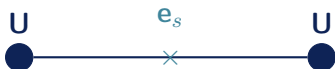


- 1 Contexte : stratégies de modélisation
 - Définition du besoin
 - Développement d'approches simplifiées
 - Éléments finis multifibres
- 2 **Éléments finis multifibres**
 - Principe
 - Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
 - Modèles de comportement matériau
 - Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres
- 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

Éléments finis multifibres

Échelle de la poutre

- Éléments poutre

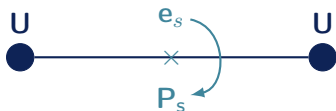


e_s Déformations généralisées

Éléments finis multifibres

Échelle de la poutre

- Éléments poutre
sans postulat de la loi de comportement généralisée



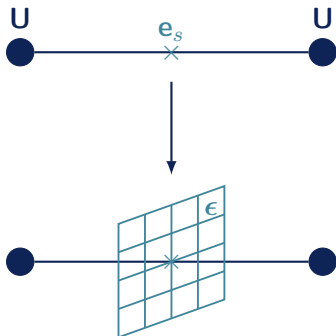
e_s Déformations généralisées

P_s Efforts généralisés

Éléments finis multifibres

Échelle de la poutre

- Éléments poutre + section au point de Gauss de l'élément

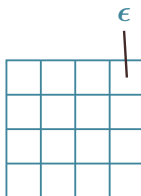


e_s Déformations généralisées

ϵ Déformations

Éléments finis multifibres

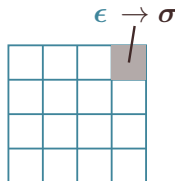
Passage à l'échelle de la section



- Calcul des déformations ϵ
 - dans chaque "fibre" (= point d'intégration) de la section,
 - à partir d'une hypothèse cinématique (ex : Timoshenko).

Éléments finis multifibres

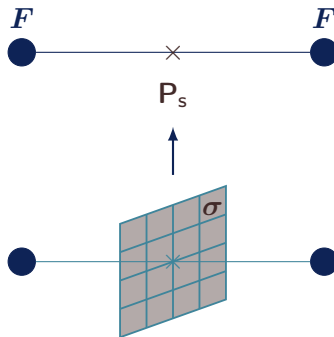
Passage à l'échelle de la section



- Calcul des déformations ϵ
 - dans chaque "fibre" (= point d'intégration) de la section,
 - à partir d'une hypothèse cinématique (ex : Timoshenko).
- Calcul des contraintes σ
 - à partir des déformations dans chaque fibre,
 - grâce à la loi de comportement choisie.

Éléments finis multifibres

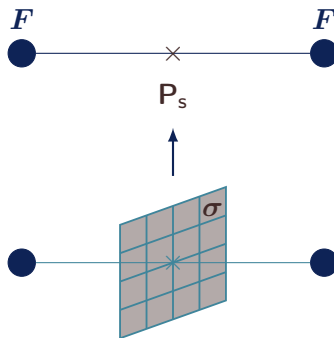
Retour à l'échelle de la poutre



- Efforts généralisés calculés par intégration des contraintes sur la section

Éléments finis multifibres

Retour à l'échelle de la poutre



- Efforts généralisés calculés par intégration des contraintes sur la section
- Puis interpolés aux noeuds de l'élément poutre

- 1 Contexte : stratégies de modélisation
 - Définition du besoin
 - Développement d'approches simplifiées
 - Éléments finis multifibres
- 2 **Éléments finis multifibres**
 - Principe
 - **Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko**
 - Modèles de comportement matériau
 - Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres
- 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds : $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$

Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds : $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$
- Déplacements dans la poutre
 - Hypothèse de Timoshenko : sections restent planes
 - D'où le champ de déplacement :

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u - y\theta_z + z\theta_y \\ v - z\theta_x \\ w + y\theta_x \end{bmatrix}$$

Cinématique



- Degrés de liberté aux noeuds : $\mathbf{U} = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$
- Déplacements dans la poutre
 - Hypothèse de Timoshenko : sections restent planes
 - D'où le champ de déplacement :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u - y\theta_z + z\theta_y \\ v - z\theta_x \\ w + y\theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \mathbf{a}_s(y, z) \mathbf{U}(x)$$

Déformations

Tenseur des déformations calculé sous l'hypothèse de petites déformations par $\epsilon = \frac{1}{2} (\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}(\mathbf{u})^T)$.

Déformations dans la poutre :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} \\ -z \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{dv}{dx} - \theta_z \\ y \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{dw}{dx} + \theta_y \end{bmatrix}$$

Application du principe des travaux virtuels

$\forall \mathbf{u}^*$ cinématiquement admissible à 0,

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\epsilon_{xx}^* \sigma_{xx} + 2\epsilon_{xy}^* \sigma_{xy} + 2\epsilon_{xz}^* \sigma_{xz}) d\Omega}_{W_i^*} = \int_{S_{x,\text{ext}}} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F}_{\text{ext}} dS - \int_{\Omega} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{f} d\Omega$$

Travail virtuel des efforts internes

$$W_i^* = \int_{\Omega} (\epsilon_{xx}^* \sigma_{xx} + 2\epsilon_{xy}^* \sigma_{xy} + 2\epsilon_{xz}^* \sigma_{xz}) d\Omega$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} W_i^* = & \int_{\Omega} \left[\frac{du^*}{dx} - y \frac{d\theta_z^*}{dx} + z \frac{d\theta_y^*}{dx} \right] \sigma_{xx} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[-z \frac{d\theta_x^*}{dx} + \frac{dv^*}{dx} - \theta_z^* \right] \sigma_{xy} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[y \frac{d\theta_x^*}{dx} + \frac{dw^*}{dx} + \theta_y^* \right] \sigma_{xz} d\Omega \end{aligned}$$

Travail virtuel des efforts internes

Discrétisation adaptée aux éléments poutres

$$\begin{aligned}
 W_i^* = & \int_L \frac{du^*}{dx} \left[\int_{\mathcal{S}} \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx \\
 & + \int_L \left(\frac{dv^*}{dx} - \theta_z^* \right) \left[\int_{\mathcal{S}} \sigma_{xy} d\mathcal{S} \right] dx \\
 & + \int_L \left(\frac{dw^*}{dx} + \theta_y^* \right) \left[\int_{\mathcal{S}} \sigma_{xz} d\mathcal{S} \right] dx \\
 & + \int_L \frac{d\theta_x^*}{dx} \left[\int_{\mathcal{S}} y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy} d\mathcal{S} \right] dx \\
 & + \int_L \frac{d\theta_y^*}{dx} \left[\int_{\mathcal{S}} z \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx \\
 & + \int_L \frac{d\theta_z^*}{dx} \left[\int_{\mathcal{S}} -y \sigma_{xx} d\mathcal{S} \right] dx
 \end{aligned}$$

Définition des déformations et efforts généralisés conjugués

$$\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw}{dx} + \theta_y \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ \alpha \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} \int_S \sigma_{xx} dS \\ \int_S \sigma_{xy} dS \\ \int_S \sigma_{xz} dS \\ \int_S y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy} dS \\ \int_S z \sigma_{xx} dS \\ \int_S -y \sigma_{xx} dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$W_i^* = \int_L \mathbf{e}_s^{*T} \mathbf{P}_s dx = \int_L \mathbf{e}_s^{*T} \left[\int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS \right] dx$$

Discrétisation en éléments poutres

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{B}_p \mathbf{U}_{el}^p$$

$$W_i^* = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \underbrace{\int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[\int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS \right] dx}_{\mathbf{P}_{el}}$$

$$\mathbf{P}_{el} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{P}_s dx$$

$$\mathbf{P}_s = \int_S \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma} dS$$

Définition des matrices de raideur élémentaire et de section

Linéarisation de la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}_{\text{mat}} \boldsymbol{\epsilon}$$

Effort résistant élémentaire linéarisé :

$$\mathbf{P}_{\text{el,lin}} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[\int_S \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \boldsymbol{\epsilon} dS \right] dx = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \left[\int_S \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \mathbf{a}_s dS \right] \mathbf{B}_p dx \mathbf{U}_{\text{el}}^p$$

D'où la définition des matrices de raideur :

$$\mathbf{K}_{\text{el}} = \int_{L^e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{K}_s \mathbf{B}_p dx$$

$$\mathbf{K}_s = \int_S \mathbf{a}_s^T \mathbf{K}_{\text{mat}} \mathbf{a}_s dS$$

- 1 Contexte : stratégies de modélisation
 - Définition du besoin
 - Développement d'approches simplifiées
 - Éléments finis multifibres
- 2 **Éléments finis multifibres**
 - Principe
 - Formulation d'un élément fini multifibre de Timoshenko
 - **Modèles de comportement matériau**
 - Domaine d'utilisation des éléments finis multifibres
- 3 Vers un enrichissement des approches simplifiées

Caractéristiques des modèles de comportement

Complexité du modèle fonction des besoins de modélisation

- Modèle 1D $\epsilon_{xx} \rightarrow \sigma_{xx}$ très efficace pour applications :
 - Éléments de structures élancés (Modélisation Bernoulli)
 - Contraintes normales prédominantes
- Modèles "1,5D" $[\epsilon_{xx} \quad 2\epsilon_{xy} \quad 2\epsilon_{xz}] \rightarrow [\sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz}]$
- Modèles 3D condensés pour obtenir un tenseur des contraintes antiplan

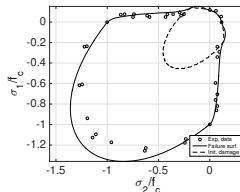
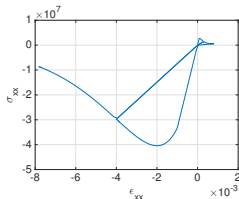
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

+ Prise en compte ou non des non-linéarités

Exemple de modèle matériau béton

Mu modèle [Mazars et al., 2014]

- Modèle d'endommagement unilatéral



- Paramètres à définir :

- Module d'Young E
- Coefficient de Poisson ν (choisi = 0,2)
- Seuils d'endommagement y_{c0} , y_{t0}
- Paramètres A_c , B_c , A_t , B_t gouvernant la forme du comportement après endommagement

Atouts des éléments finis multifibres

Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

Atouts des éléments finis multifibres

Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

Validité de la méthode : contraintes normales prédominantes

- Poutres élancées, sollicitées en traction-compression ou flexion
- Démontrée sur des benchmarks [Grange et al., 2008], [Kotronis, 2008]

Atouts des éléments finis multifibres

Méthode adaptée au calcul sismique des structures existantes

- Prise en compte du comportement local
- Rapidité de calcul
- Utilisation similaire aux éléments poutre, résultats aisés à interpréter

Validité de la méthode : contraintes normales prédominantes

- Poutres élancées, sollicitées en traction-compression ou flexion
- Démontrée sur des benchmarks [Grange et al., 2008], [Kotronis, 2008]



Développement des éléments finis multifibres

Volet 3 projet ANR Sinaps@

Limites des éléments finis multifibres

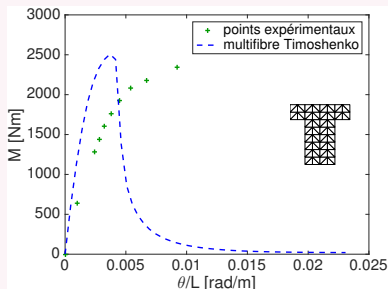
Limites : cisaillement important

- Effort tranchant [Mazars et al., 2002]
- Torsion [Casaux, 2003]

Limites des éléments finis multifibres

Limites : cisaillement important

- Effort tranchant [Mazars et al., 2002]
- Torsion [Casaux, 2003]



Enrichissement des éléments finis multifibres

Travaux récents de recherche

- Enrichissement de la cinématique pour améliorer le comportement en
 - Torsion [Casaux, 2003], [Capdevielle, 2015]
 - Cisaillement [LeCorvec, 2012], [Capdevielle, 2016]
- Prise en compte de la fissuration [Bitar, 2017]
- Prise en compte de l'effet de confinement lié aux armatures transversales
- Comportement de l'interface acier-béton

Enjeux

- Conserver un temps de calcul compétitif
- Conserver l'ergonomie