Dynamique non linéaire et rayonnement acoustique des structures à interfaces frottantes

Workshop csma juniors - 14 mai 2017
Mini cours 1 : vibrations non linéaires

Kevin Soobbarayen

De quelles structures s'agit-il ?

Exemple de la nature

- Frottement ailes
- Vibrations
- Chant du grillon

Instruments de musique

- Archet/corde
- Baguette/corps
- Vibrations, sons

Nuisances sonores

- Frottement disque/garniture
- Vibrations, crissement

Enjeux liés au crissement des freins à disque

Secteur aéronautique

- Crissement à l'atterrissage
- Bruit inaudible
- Vibrations dommageables
- Sécurité

Secteur ferroviaire

- Train entrant en gare
- Niveau sonore élevé
- Norme européenne, seuil de douleur
- Santé

Secteur automobile

- Ambiance acoustique
- Qualité perçue
- Coût de garantie important
- Confort, économie

Compréhension et prédiction du comportement vibratoire et acoustique des systèmes de frein sujets au crissement

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement

Interface

- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations

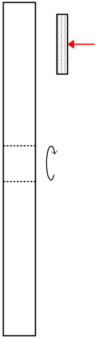
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique

- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



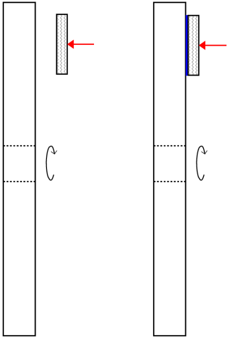
Interface
- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique
- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



Interface

- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations

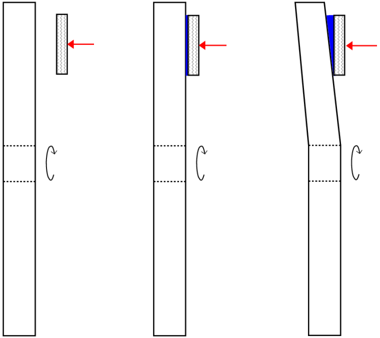
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique

- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



Interface

- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations

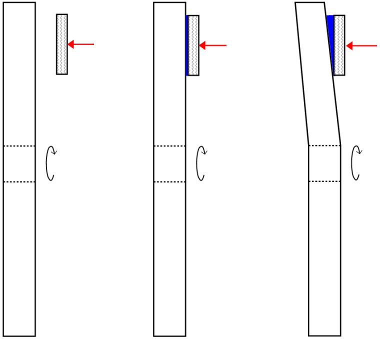
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique

- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



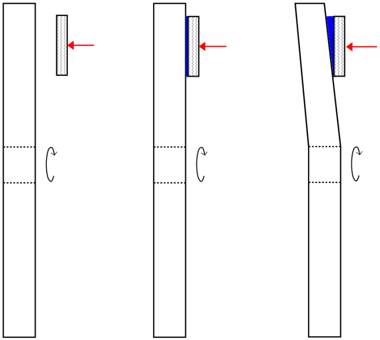
Interface
- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique
- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant
  disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable → pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



Interface

- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations

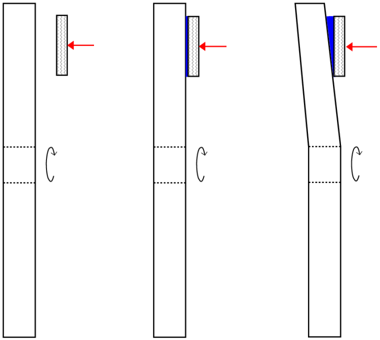
- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique

- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Description d'un évènement de crissement

- Disque en rotation
- Pression hydraulique de freinage
- Contact frottant disque / plaquette
- Configuration d'équilibre glissant
- Stable $\rightarrow$ pas de crissement
- Instable :
  - Divergence
  - Vibrations auto-entretenues
  - Émissions sonores de crissement



Interface

- Contact frottant
- Instabilité dynamique

Vibrations

- Non linéaires
- Auto-entretenues
- Spectre complexe

Rayonnement acoustique

- Niveaux importants
- Rayonnement complexe

Objectifs du mini cours

Etude d'un modèle simplifié de frein

1. Modélisation
2. Méthode des éléments finis
3. Gestion des non-linéarités (contact frottant)
4. Analyse de stabilité
5. Calcul des vibrations/rayonnement acoustique

Mise en pratique : système à 2 ddls

1. Modélisation : masse, raideur, amortissement, contact, frottement
2. Analyse de stabilité : couplage de mode
3. Calcul des vibrations : intégration temporelle
4. Analyse des vibrations : trajectoire, portrait de phase, spectre

Démarche globale d'analyse numérique du crissement

Modélisation non linéaire
géométrie, MEF, BEM,
contact, frottement, etc

Analyse de stabilité
Calcul de l'équilibre glissant
Analyse aux valeurs propres complexes

Équilibre instable

Équilibre stable

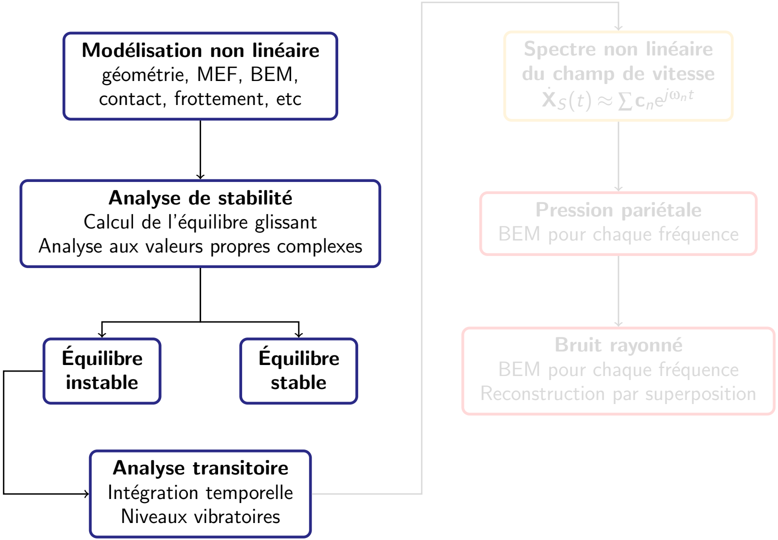
Analyse transitoire
Intégration temporelle
Niveaux vibratoires

Spectre non linéaire du champ de vitesse
$\dot{\mathbf{X}}_S(t) \approx \sum \mathbf{c}_n e^{j\omega_n t}$

Pression pariétale
BEM pour chaque fréquence

Bruit rayonné
BEM pour chaque fréquence
Reconstruction par superposition

Démarche globale d'analyse numérique du crissement



Démarche globale d'analyse numérique du crissement

Modélisation non linéaire
géométrie, MEF, BEM,
contact, frottement, etc

Analyse de stabilité
Calcul de l'équilibre glissant
Analyse aux valeurs propres complexes

Équilibre instable

Équilibre stable

Analyse transitoire
Intégration temporelle
Niveaux vibratoires

Spectre non linéaire du champ de vitesse
$\dot{\mathbf{X}}_S(t) \approx \sum \mathbf{c}_n e^{j\omega_n t}$

Pression pariétale
BEM pour chaque fréquence

Bruit rayonné
BEM pour chaque fréquence
Reconstruction par superposition

Démarche globale d'analyse numérique du crissement

Modélisation non linéaire
géométrie, MEF, BEM,
contact, frottement, etc

Analyse de stabilité
Calcul de l'équilibre glissant
Analyse aux valeurs propres complexes

Équilibre instable

Équilibre stable

Analyse transitoire
Intégration temporelle
Niveaux vibratoires

Spectre non linéaire du champ de vitesse
$\dot{\mathbf{X}}_S(t) \approx \sum \mathbf{c}_n e^{j\omega_n t}$

Pression pariétale
BEM pour chaque fréquence

Bruit rayonné
BEM pour chaque fréquence
Reconstruction par superposition

Plan

1. Vibrations auto-entretenues d'un système frottant
2. Rayonnement acoustique lors d'un évènement de crissement
3. Mise en œuvre : oscillateur non linéaire à 2 ddls

Vibrations auto-entretenues d'un système frottant

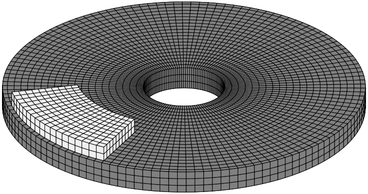
1. Modèle simplifié de frein à disque
2. Gestion du contact
3. Modélisation du frottement
4. Stabilité d'un système frottant
5. Dynamique du crissement

Modèle simplifié de frein à disque

Modélisation éléments finis

Caractéristiques

- Deux composants principaux
- Disque + une plaquette
- Maillages coïncidents (34000 ddls)
- Pression de freinage :
  dos de la plaquette

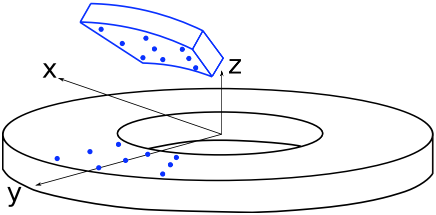


En pratique

- Méthode des éléments finis
- Outils : Structural Dynamic Toolbox (SDTools)
- Génération matrices masse/raideur puis import sous Matlab

Modèle simplifié de frein à disque

Gestion du contact frottant



Gestion du contact

- Sélection de points de contact •
- Loi de contact :

$$F^{\mathrm{d}}_{\mathrm{contact},z} = \begin{cases} k_{\mathrm{L}}\delta + k_{\mathrm{NL}}\delta^3 & \text{si } \delta \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

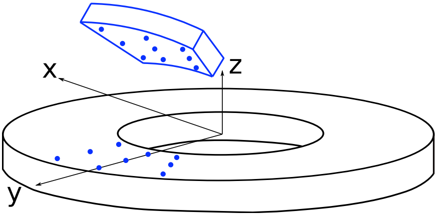
- Non-linéarités : cubique + décollement

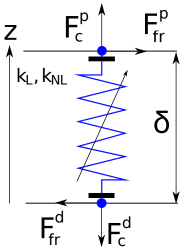
Gestion du frottement

- Loi de Coulomb
- Coefficient de frottement constant
- Glissement permanent
- $\mathbf{F}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{friction}} = -\mu F^{\mathrm{d}}_{\mathrm{contact},z} \frac{\mathbf{v_r}}{||\mathbf{v_r}||}$

Modèle simplifié de frein à disque

Gestion du contact frottant





Gestion du contact

- Sélection de points de contact •
- Loi de contact :

$$F^{\mathrm{d}}_{\mathrm{contact},z} = \begin{cases} k_{\mathrm{L}}\delta + k_{\mathrm{NL}}\delta^3 & \text{si } \delta \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Non-linéarités : cubique + décollement

Gestion du frottement

- Loi de Coulomb
- Coefficient de frottement constant
- Glissement permanent
- $\mathbf{F}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{friction}} = -\mu F^{\mathrm{d}}_{\mathrm{contact},z} \frac{\mathbf{v_r}}{||\mathbf{v_r}||}$

Modèle simplifié de frein à disque

Équation du mouvement

Équation du mouvement dans l'espace réduit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F_{NL}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F_p}$$

- $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$: masse, raideur
- $\mathbf{F_{NL}}$: effort non linéaire contact + frottement
- $\mathbf{F_p}$: pression de freinage
- $\mathbf{C}$: amortissement modal
- Pourcentage ξ pour les modes stables
- Taux ζ pour les modes coalescents

En pratique

1. Vecteur d'état $\mathbf{Y} = [\dot{\mathbf{X}}\ \mathbf{X}]^T$
2. $$\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{\mathrm{NL}} + \mathbf{F_p} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$
3. $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}_{\mathrm{NL}}$

Analyse non linéaire de stabilité

Théorie de Lyapunov

1. Calcul de l'équilibre glissant : $\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$
2. Linéarisation des équations du mouvement : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

3. Calcul des valeurs propres du système linéarisé :

$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

4. Analyse des valeurs propres du système linéarisé :
   - Solution du type $\delta\mathbf{X} \propto e^{\lambda t} = e^{\Re(\lambda)t}e^{i\Im(\lambda)t}$
   - Si $\forall k \quad \Re(\lambda_k) < 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ stable
   - Si $\exists k \,/\, \Re(\lambda_k) > 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ instable

Analyse non linéaire de stabilité
Théorie de Lyapunov

1. Calcul de l'équilibre glissant : $\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$
2. Linéarisation des équations du mouvement : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

3. Calcul des valeurs propres du système linéarisé :

$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

4. Analyse des valeurs propres du système linéarisé :
   - Solution du type $\delta\mathbf{X} \propto e^{\lambda t} = e^{\Re(\lambda)t}e^{i\Im(\lambda)t}$
   - Si $\forall k \quad \Re(\lambda_k) < 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ stable
   - Si $\exists k \,/\, \Re(\lambda_k) > 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ instable

Analyse non linéaire de stabilité

Théorie de Lyapunov

1. Calcul de l'équilibre glissant : $\mathbf{KX}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$
2. Linéarisation des équations du mouvement : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

3. Calcul des valeurs propres du système linéarisé :

$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\right)\mathbf{\Phi} = 0$$

4. Analyse des valeurs propres du système linéarisé :
   - Solution du type $\delta\mathbf{X} \propto e^{\lambda t} = e^{\Re(\lambda)t}e^{i\Im(\lambda)t}$
   - Si $\forall k \quad \Re(\lambda_k) < 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ stable
   - Si $\exists k \,/\, \Re(\lambda_k) > 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ instable

Analyse non linéaire de stabilité

Théorie de Lyapunov

1. Calcul de l'équilibre glissant : $\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$
2. Linéarisation des équations du mouvement : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$
$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{x}_{\text{glissant}}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$$
3. Calcul des valeurs propres du système linéarisé :
$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{x}_{\text{glissant}}})\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$
4. Analyse des valeurs propres du système linéarisé :
   - Solution du type $\delta\mathbf{X} \propto e^{\lambda t} = e^{\Re(\lambda)t}e^{i\Im(\lambda)t}$
   - Si $\forall k \quad \Re(\lambda_k) < 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ stable
   - Si $\exists k \,/\, \Re(\lambda_k) > 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ instable

Analyse non linéaire de stabilité

Théorie de Lyapunov

1. Calcul de l'équilibre glissant : $\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$

2. Linéarisation des équations du mouvement : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

3. Calcul des valeurs propres du système linéarisé :

$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL},\mathbf{X}_{\text{glissant}}})\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

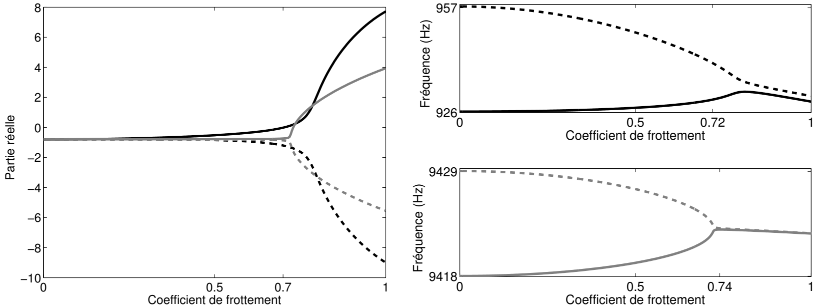
4. Analyse des valeurs propres du système linéarisé :
   - Solution du type $\delta\mathbf{X} \propto e^{\lambda t} = e^{\Re(\lambda)t}e^{i\Im(\lambda)t}$
   - Si $\forall k \quad \Re(\lambda_k) < 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ stable
   - Si $\exists k \,/\, \Re(\lambda_k) > 0 \rightarrow \mathbf{X}_{\text{glissant}}$ instable

Analyse non linéaire de stabilité

Résultats de stabilité

En pratique

- $\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{glissant}} = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{glissant}}) + \mathbf{F}_{\text{press}}$ calculé avec *fsolve*
- Calcul de $\mathbf{J}_{\text{NL}}$, introduit dans $\mathbf{K}$
- Calcul les valeurs propres de $\mathbf{B}$: [V, D]=eig(B)
- Évolution parties réelles/fréquences : μ, amortissement, etc.



Calcul des vibrations induites par frottement

Liste des cas étudiés

Cas	μ	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	Stabilité
1_{statique}	0.69	-	-	stable
2_{statique}	0.72	929.8	-	1 instabilité
3_{statique}	0.731	930	9420.9	2 instabilités

Problème dynamique

- Intégration temporelle
- $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} + \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{V}_{\text{NL}}(\mathbf{Y}, \mu)$
- Conditions initiales :

$$\mathbf{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{\text{glissant}}(\mu) + \delta\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

En pratique

- $\delta\mathbf{X}$ "Suffisamment" faible
- Script *dy* qui calcule $\dot{\mathbf{Y}}(t)$
- Solver *ode45* (RK4)
- ode45(dy, $[t_0 \ t_f]$, $\mathbf{Y}(t_0)$, ...)
- Analyse fréquentielle : *fft*

Calcul des vibrations induites par frottement

Liste des cas étudiés

Cas	μ	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	Stabilité
1_{statique}	0.69	-	-	stable
2_{statique}	0.72	929.8	-	1 instabilité
3_{statique}	0.731	930	9420.9	2 instabilités

Problème dynamique

- Intégration temporelle
- $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} + \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{V}_{\text{NL}}(\mathbf{Y},\mu)$
- Conditions initiales :

$$\mathbf{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{\text{glissant}}(\mu) + \delta\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

En pratique

- $\delta\mathbf{X}$ "Suffisamment" faible
- Script *dy* qui calcule $\dot{\mathbf{Y}}(t)$
- Solver *ode45* (RK4)
- ode45(dy, $[t_0\ t_f]$,$\mathbf{Y}(t_0)$, ...)
- Analyse fréquentielle : *fft*

Calcul des vibrations induites par frottement

Liste des cas étudiés

Cas	μ	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	Stabilité
1_{statique}	0.69	-	-	stable
2_{statique}	0.72	929.8	-	1 instabilité
3_{statique}	0.731	930	9420.9	2 instabilités

Problème dynamique

- Intégration temporelle
- $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} + \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{V}_{\text{NL}}(\mathbf{Y},\mu)$
- Conditions initiales :

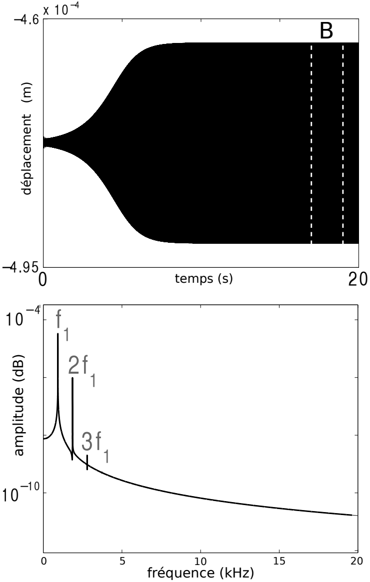
$$\mathbf{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{\text{glissant}}(\mu) + \delta\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

En pratique

- $\delta\mathbf{X}$ “Suffisamment” faible
- Script *dy* qui calcule $\dot{\mathbf{Y}}(t)$
- Solver *ode45* (RK4)
- ode45(dy, $[t_0\ t_f]$, $\mathbf{Y}(t_0)$, ...)
- Analyse fréquentielle : *fft*

Calcul des vibrations induites par frottement

Dynamique du crissement à un mode instable : cas 2_{statique}



Analyse temporelle

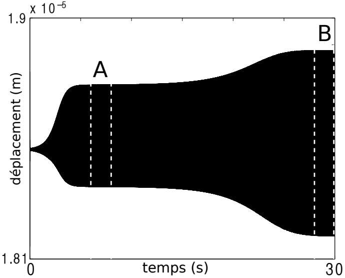
- Transitoire : divergence “lente”
- Stationnaire : saturation de l’amplitude due aux non-linéarités
- Déplacement : 0.25×10^{-4} m
- Vitesse : 0.16 ms^{-1}

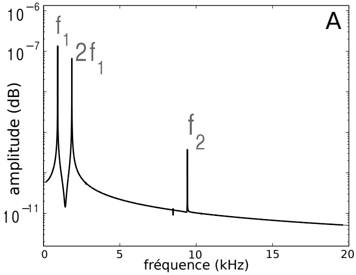
Analyse spectrale (zone B)

- Participation du 1er mode instable
- $f_1 = 930$ Hz : prédiction analyse de stabilité
- Signature non linéaire : f_1, $2f_1$, $3f_1$

Calcul des vibrations induites par frottement

Dynamique du crissement à un mode instable : cas $3_{statique}$





Analyse temporelle

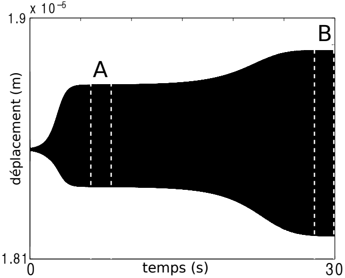
- Transitoire : divergence “lente”
- Déplacement : 0.08×10^{-5} m
- Vitesse : 0.03 ms^{-1}

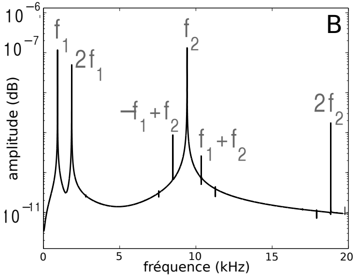
Analyse spectrale

- Participation des 2 modes instables
- $f_1 \neq 930$ Hz
- $f_2 = 9424$ Hz
- Signature non linéaire :
  - f_1, $2f_1$, $3f_1$ et f_2, $2f_2$
  - Composantes $\pm m f_1 \pm n f_2$

Calcul des vibrations induites par frottement

Dynamique du crissement à un mode instable : cas $3_{statique}$





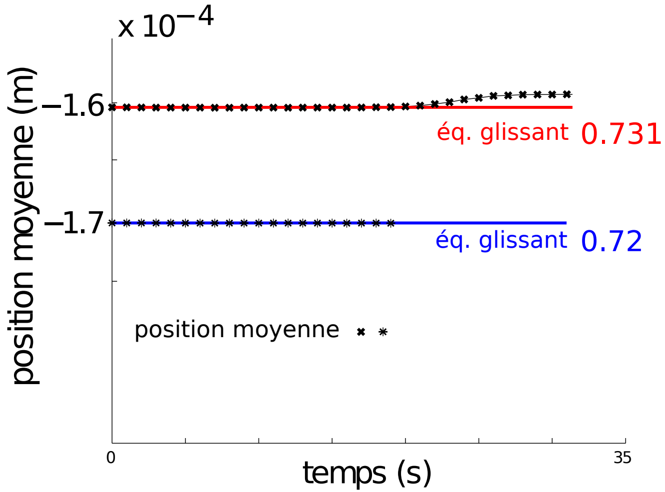
Analyse temporelle

- Transitoire : divergence “lente”
- Déplacement : 0.08×10^{-5} m
- Vitesse : 0.03 ms^{-1}

Analyse spectrale

- Participation des 2 modes instables
- $f_1 \neq 930$ Hz
- $f_2 = 9424$ Hz
- Signature non linéaire :
  - f_1, $2f_1$, $3f_1$ et f_2, $2f_2$
  - Composantes $\pm mf_1 \pm nf_2$

Analyse de la position moyenne

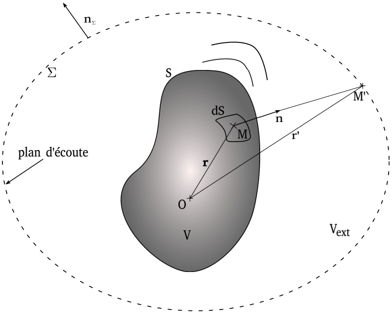


Formulation acoustique mono-fréquentielle et BEM

Formulation continue

1. Calcul des vibrations – Évolution harmonique : $P(\mathbf{r}',t) = \hat{P}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}$
2. Équation des ondes : $\left(\Delta + k^2\right)\hat{P}(\mathbf{r}') = 0$
3. Équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz :

$$c(\mathbf{r}')\hat{P}(\mathbf{r}') = \int_S \left(\hat{P}(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}',k)}{\partial n} - G(\mathbf{r},\mathbf{r}',k)\frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$



Méthode des éléments de frontière

1. Pression pariétale :

$$(\mathbb{M} - \mathbb{C})\hat{\mathbf{P}}_S = -jk\rho c \mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n$$

2. Pression rayonnée :

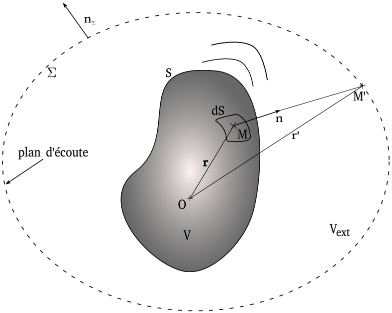
$$\mathbb{C}\hat{\mathbf{P}} = \mathbb{M}\hat{\mathbf{P}}_S + jk\rho c \mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n$$

Formulation acoustique mono-fréquentielle et BEM

Formulation continue

1. Calcul des vibrations – Évolution harmonique : $P(\mathbf{r}',t) = \hat{P}(\mathbf{r}')e^{j\omega t}$
2. Équation des ondes : $\left(\Delta + k^2\right)\hat{P}(\mathbf{r}') = 0$
3. Équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz :

$$c(\mathbf{r}')\hat{P}(\mathbf{r}') = \int_S \left(\hat{P}(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}',k)}{\partial n} - G(\mathbf{r},\mathbf{r}',k) \frac{\partial \hat{P}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$



Méthode des éléments de frontière

1. Pression pariétale :

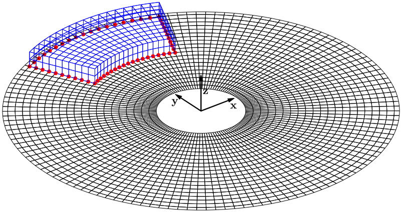
$$(\mathbb{M} - \mathbb{C})\hat{\mathbf{P}}_S = -jk\rho c \mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n$$

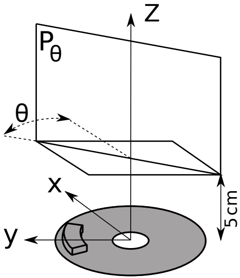
2. Pression rayonnée :

$$\mathbb{C}\hat{\mathbf{P}} = \mathbb{M}\hat{\mathbf{P}}_S + jk\rho c \mathbb{L}\hat{\mathbf{V}}_n$$

Application au système de frein

Modèle éléments finis de frontière

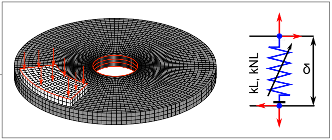




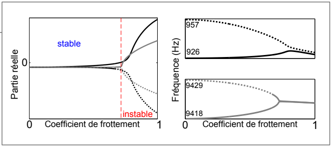
En pratique

1. OpenBEM toolbox open source
   http ://www.openbem.dk/
2. **Inputs** :
   - maillage surfacique
   - champ de vitesse pariétale
   - fréquence
3. **Output** : pression pariétale
4. Calcul du champ de pression sur des plans d'écoute

Modélisation NL
Géométrie, MEF,
contact, frottement



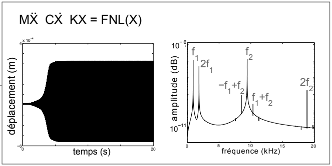
Analyse de stabilité
Valeurs propres
Système linéarisé



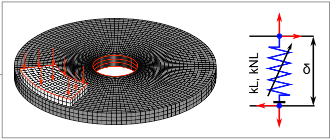
Equilibre instable

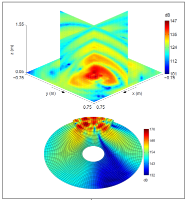
Equilibre stable

Analyse NL
Intégration temporelle
Niveaux vibratoires

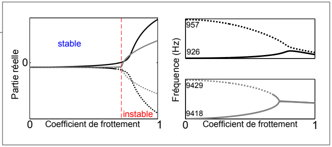


Modélisation NL
Géométrie, MEF,
contact, frottement





Analyse de stabilité
Valeurs propres
Système linéarisé



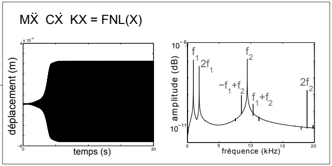
Equilibre instable

Equilibre stable

Bruit rayonné par superposition

Calcul parallèle
ω_1 ω_2 ... ω_n
BEM

Analyse NL
Intégration temporelle
Niveaux vibratoires



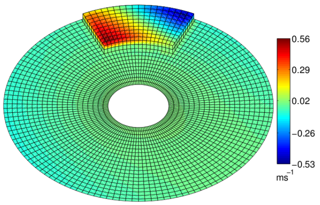
Spectre NL

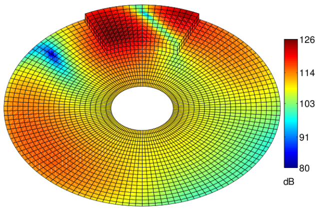
$$\dot{\mathbf{X}}_S(t) \approx \sum \mathbf{c}_n e^{j\omega_n t}$$

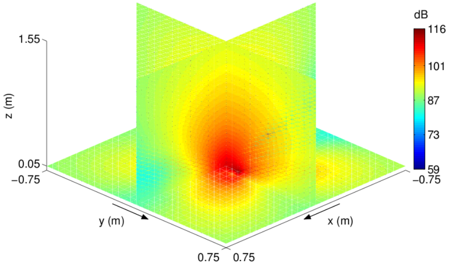
Couplage MEF/BEM

Application au système de frein

Rayonnement acoustique à 1 mode instable : cas 2_{statique}



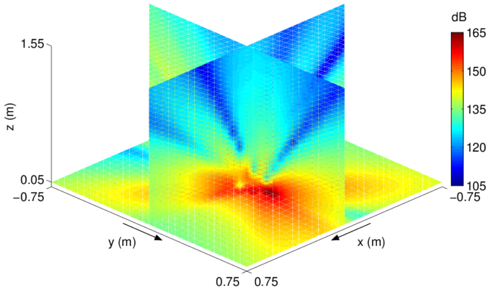




Ordre	Base
1	f_1
2	$2f_1$
3	$3f_1$
4	$4f_1$
5	$5f_1$
6	$6f_1$
10	$10f_1$

Application au système de frein

Rayonnement acoustique à 2 modes instables : cas 3_{statique}

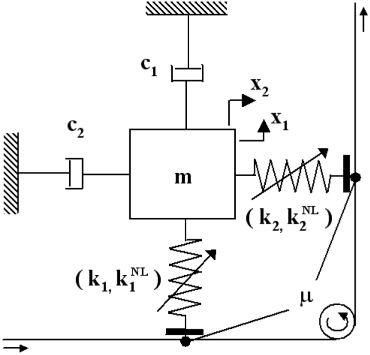


Ordre	Base
1	f_1 f_2
2	$2f_1$ $-f_1 + f_2$ $f_1 + f_2$ $2f_2$
3	$3f_1$ $-2f_1 + f_2$ $2f_1 + f_2$ $-f_1 + 2f_2$ $f_1 + 2f_2$
4	$-2f_1 + 2f_2$
11	$10f_1 + f_2$

Temps de calcul

- Problème pariétal : 2 h/comp.
- P. rayonnée : 1 s/point soit 1 h/comp.
- Total : 3h $\times$ 15 comp. $\approx$ 2 jours

Oscillateur à 2 ddls : hypothèses



Hypothèses

1. 2 ddls : x_1, x_2
2. Vitesse glissement constante
3. Contact permanent
4. Ressorts non linéaires
5. Frottement de Coulomb

Oscillateur à 2 ddls : modèle

1. Effort de contact/frottement : $\begin{bmatrix} -k_1x_1 - k_1^{nl}x_1^3 + \mu(k_2x_2 + k_2^{nl}x_2^3) \\ -k_2x_2 - k_2^{nl}x_2^3 - \mu(k_1x_1 + k_1^{nl}x_1^3) \end{bmatrix}$

2. Équilibre dynamique

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{X}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{X}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -\mu k_2 \\ \mu k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1^{nl}x_1^3 + \mu k_2^{nl}x_2^3 \\ -k_2^{nl}x_2^3 - \mu k_1^{nl}x_1^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F_{NL}}}$$

3. Équation d'état : $\mathbf{Y} = [\dot{\mathbf{X}}\ \mathbf{X}]^T \rightarrow \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} + \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{V_{NL}}(\mathbf{Y})$

Oscillateur à 2 ddls : analyse de stabilité

Paramètres

1. Fréquences propres : $\omega_1 = 2\pi\times100$ - $\omega_2 = 2\pi\times75$
2. Masse : $m_1 = m_2 =$1kg
3. Raideurs : $k_i = m_i\omega_i^2$ - $k_i = k_i^{NL}$
4. Amortissement modale : $\zeta_i = 2\xi_i\omega_i$ - $\xi_i = 0.1$
5. Coefficient de frottement $\mu \in [0\ 1]$

Analyse de stabilité

1. **for** i=1 :N

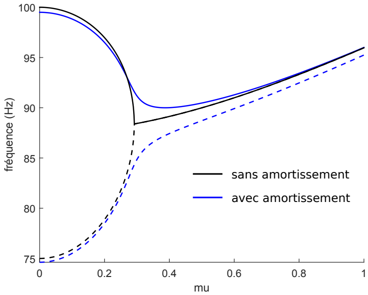
   $\mu = i/N$

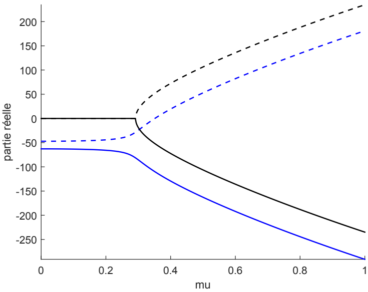
   $\mathbf{B}(\mu) = -\mathbf{AM}^{-1}\mathbf{AK}$

   $[\mathbf{V},\ \mathbf{D}] = eig(\mathbf{B})$

   end
2. Parties réelles : real(D) - fréquences : imag(D)/2π

Oscillateur à 2 ddls : diagramme de stabilité





- Coalescence de modes
- Parfaite sans amort.
- Couplage pour $\mu_C = 0.352$ (avec amort.)

- Apparition de partie réelle >0
- Synchrone avec la coalescence
- Amortissement “stabilise”

Point de bifurcation de Hopf : dans la suite $\mu = 1.01 \times \mu_C$

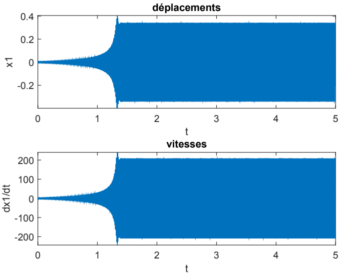
Oscillateur à 2 ddls : intégration temporelle

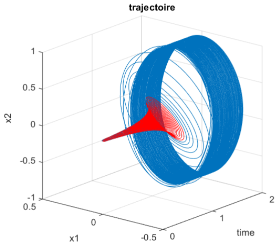
Intégration temporelle

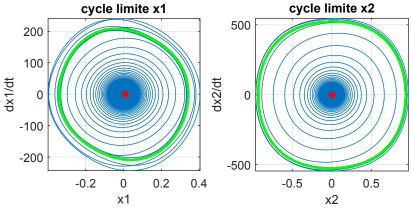
1. Écriture d'une fonction *dy*
2. Effort non linéaire :

   vnl(1,1) = kNL1*y(3)^3 - mu*kNL2*y(4)^3 ;
   vnl(2,1) = -kNL2*y(4)^3 - mu*kNL1*y(3)^3 ;
   vnl(3,1) = 0 ;
   vnl(4,1) = 0 ;
3. EDO à résoudre : yp=B*y + inv(AM)*vnl ;
4. Conditions initiales : initial=[0 0 0.01 0] ;
5. Intervalle de temps : tspan
6. Résolution : [t, y] = ode45('dy',tspan,initial) ;

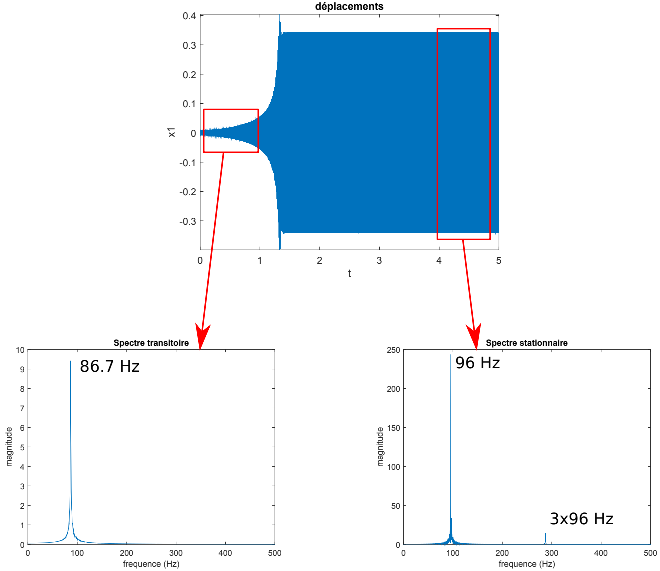
Oscillateur à 2 ddls : analyse temporelle







Oscillateur à 2 ddls : analyse fréquentielle

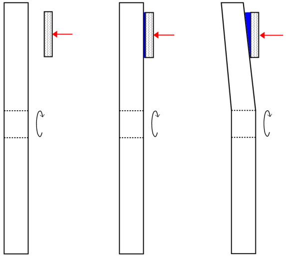


Dynamique non linéaire et rayonnement acoustique des structures à interfaces frottantes

Workshop csma juniors - 14 mai 2017
Mini cours 1 : vibrations non linéaires

Kevin Soobbarayen

Influence des paramètres sur le crissement : contexte



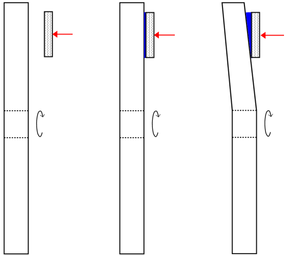
Approche classique

- Occurrence de crissement
- Intégration temporelle :
  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$
  $\dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0}$

Objectifs

1. Chargement temporel comme mécanisme déstabilisant
2. Influence du trajet de chargement sur le crissement
3. Influence du coefficient de frottement

Influence des paramètres sur le crissement : contexte



Approche classique

- Occurrence de crissement
- Intégration temporelle :
  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X}$
  $\dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0}$

Objectifs

1. Chargement temporel comme mécanisme déstabilisant
2. Influence du trajet de chargement sur le crissement
3. Influence du coefficient de frottement

Chargements envisagés

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{\text{press}}(t)$$

Chargement statique

- $\mathbf{F}_{\text{press}}(t) = \mathbf{F}_{\text{max}}$
- CI $\begin{cases} \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$

Chargement en rampe

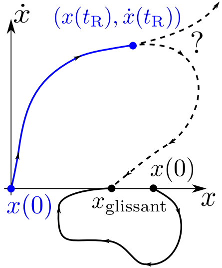
- $\mathbf{F}_{\text{press}}(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{max}} \dfrac{t}{t_R} & \text{si } t \leq t_R \\ \mathbf{F}_{\text{max}} & \text{sinon} \end{cases}$
- CI $\begin{cases} \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$

Chargements envisagés

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{\text{press}}(t)$$

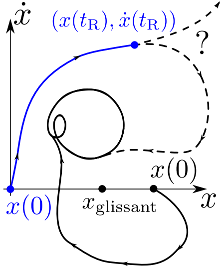
Chargement statique

- $\mathbf{F}_{\text{press}}(t) = \mathbf{F}_{\text{max}}$
- CI $\begin{cases} \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{glissant}} + \delta\mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$



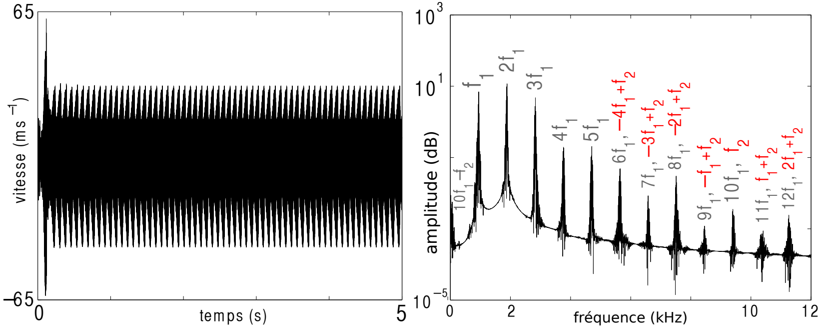
Chargement en rampe

- $\mathbf{F}_{\text{press}}(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{max}} \dfrac{t}{t_R} & \text{si } t \leq t_R \\ \mathbf{F}_{\text{max}} & \text{sinon} \end{cases}$
- CI $\begin{cases} \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$



Vibrations non linéaires sous chargement temporel

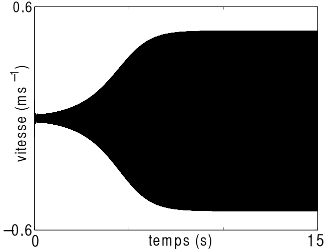
Déstabilisation par une rampe rapide : cas 1_{rapide}

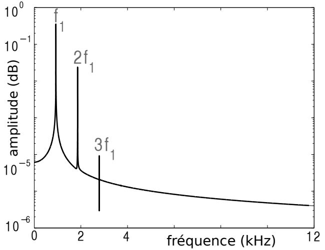


Vibrations non linéaires sous chargement temporel

Influence sur le cas à 1 mode instable

Charge statique : cas $2_{statique}$

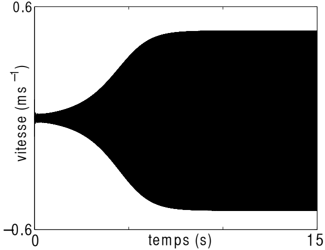


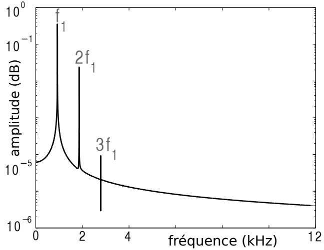


Vibrations non linéaires sous chargement temporel

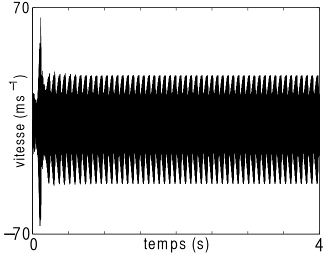
Influence sur le cas à 1 mode instable

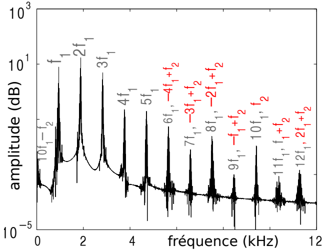
Charge statique : cas $2_{statique}$





Chargement en rampe : cas 2_{rapide}

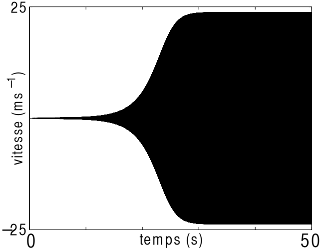


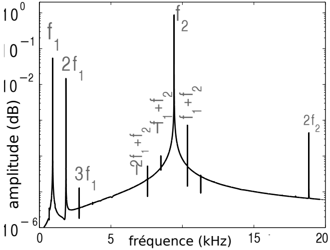


Vibrations non linéaires sous chargement temporel

Influence sur le cas à 2 modes instables

Charge statique : cas $3_{statique}$

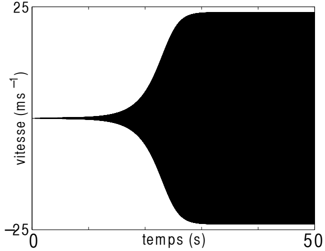


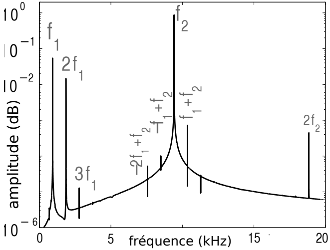


Vibrations non linéaires sous chargement temporel

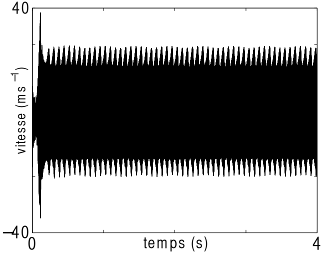
Influence sur le cas à 2 modes instables

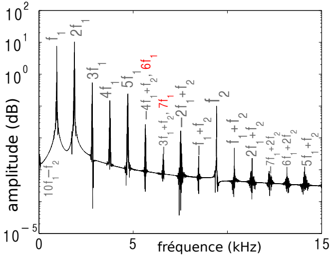
Charge statique : cas $3_{statique}$





Chargement en rampe : cas 3_{rapide}



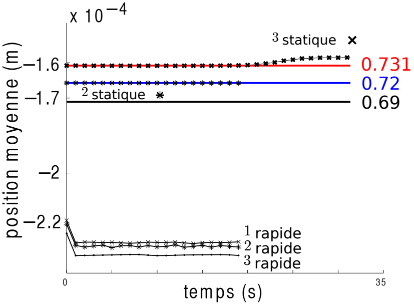


Vibrations non linéaires sous chargement temporel

Analyse de la position moyenne

Influence de la rampe

- Modification des amplitudes
- Activation de nouvelles composantes
- Évolution des fréquences fondamentales instables
- Modification des cycles limites



Vibrations non linéaires sous chargement temporel

Analyse de la position moyenne

Influence de la rampe

- Modification des amplitudes
- Activation de nouvelles composantes
- Évolution des fréquences fondamentales instables
- Modification des cycles limites